Grafica al calcolatore
-
Computer Graphics

3 – Geometria dello spazio e modellazione

Modellare lo spazio

- Richiamiamo le nozioni basilari di geometria per modellare lo spazio e gli oggetti
  - Spazi vettoriali lineari che contengono due tipi diversi di oggetti, gli scalari ed i vettori
  - Spazi affini, che sono spazi vettoriali a cui si aggiunge il concetto di punto
  - Spazi euclidei che aggiungono il concetto di prodotto interno (distanze ed angoli)
  - Lo spazio più usato ai fini della grafica 3D e lo spazio euclideo tridimensionale
  - Studieremo inoltre le trasformazioni su tali spazi

Scalari

- Gli scalari S costituiscono un corpo (tipicamente useremo IR) con due operazioni, somma e moltiplicazione, che soddisfano le seguenti relazioni

$$\forall \alpha \, \beta \, \gamma \, \in S$$

Commutatività

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

Associatività

$$+ (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Distribuzione

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Elementi neutri

$$\exists 0 \in S : \forall \alpha \in S \; \alpha + 0 = \alpha$$

$$\exists 1 \in S : \forall \alpha \in S \; \alpha 1 = \alpha$$

Elementi inversi

$$\forall \alpha \in S \exists (-\alpha) \in S : \; \alpha + (-\alpha) = 0$$

$$\forall \alpha \in S \exists \alpha^{-1} \in S : \; \alpha\alpha^{-1} = 1$$

Vettori

- I vettori costituiscono un gruppo abeliano (commutativo) V in cui e definito il prodotto di un vettore per uno scalare
- Qui indicati con caratteri minuscoli in grassetto (spesso indicati con frecce)
- La definizione è totalmente astratta, ma per semplicità conviene considerare due utili esempi di spazi vettoriali lineari:
  - Geometrico
  - Algebrico

Chiusura

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V \quad \forall \mathbf{u}\mathbf{v}\in V$$

$$\alpha\mathbf{v}\in V \quad \forall \alpha\in S\,\mathbf{v}\in V$$

Proprietà algebriche

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$$

$$\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$$

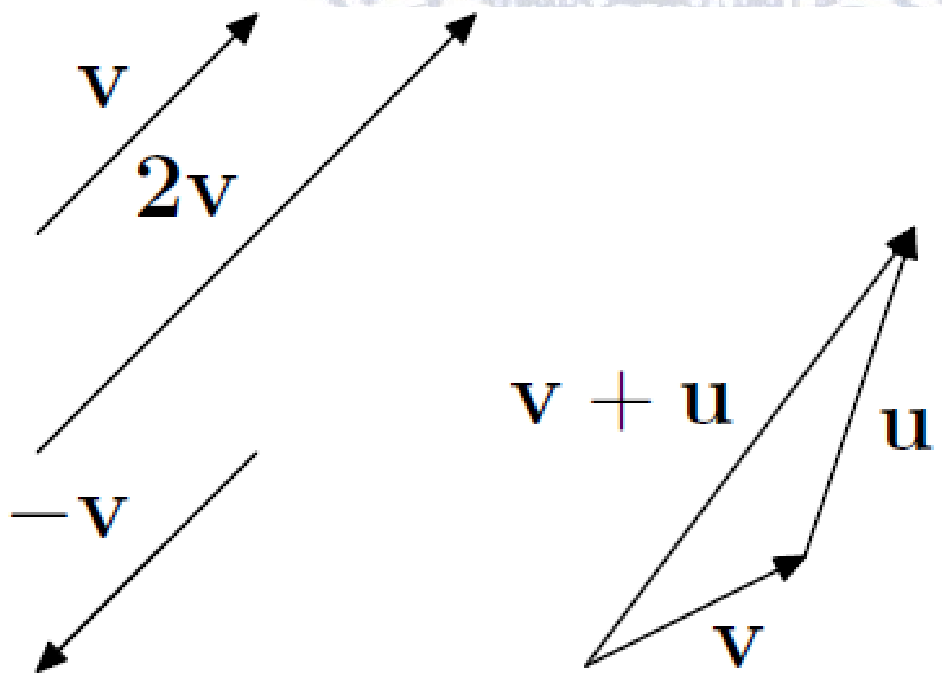
$$(\alpha+\beta)\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$$

$$\exists \mathbf{0}\in V:\forall \mathbf{u}\in V\ \mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$$

$$\forall \mathbf{u}\in V\exists(-\mathbf{u})\in V:\ \mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$$

Vettori

- Un esempio concreto e dato dai segmenti orientati liberi, ovvero senza un punto di applicazione specificato
- Il prodotto con uno scalare (numeri reali) cambia la lunghezza del vettore
- La somma di due vettori e data dalla regola del parallelogramma



Vettori

- Un altro esempio e dato dall'insieme delle n-ple ordinate di IR^n

$$\mathbf{v} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \quad \beta_i \in \mathbb{R}\, \forall i$$

- Il prodotto per uno scalare e la somma di due vettori sono definiti in modo del tutto naturale

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha\beta_1, \ldots, \alpha\beta_n)$$

- E' facile vedere qual è l'elemento neutro e qual è l'inverso di un vettore

Indipendenza lineare

- Dati n vettori non nulli, si dicono linearmente indipendenti se qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli e diversa dal vettore nullo

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \, \forall i$$

- Si dice dimensione di uno spazio vettoriale il massimo numero di vettori linearmente indipendenti
- In uno spazio vettoriale a dimensione n, un insieme di n vettori linearmente indipendenti si dice una base per lo spazio
- Ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei vettori di una base

$$\forall \mathbf{v} \in V \exists (\alpha_1 \ldots \alpha_n) : \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Rappresentazione in componenti

- Fissata quindi una base in uno spazio vettoriale, ad ogni vettore corrisponde una n-pla di scalari, ovvero i coefficienti dello sviluppo lineare del vettore nei vettori di base; tali scalari sono le componenti del vettore rispetto alla base data.
- In genere il corpo è dato dai reali; abbiamo quindi ottenuto la rappresentazione concreta vista prima di uno spazio vettoriale astratto come insieme di n-ple di $\mathbb{R}^n$
- Tale rappresentazione dipende dalla base scelta

Punti

- I vettori non rappresentano punti nello spazio, ma solo spostamenti. Per poter introdurre il concetto di posizione si deve passare agli spazi ani che sono degli spazi vettoriali a cui si aggiunge il concetto astratto di punto.
- I punti sono definiti in senso astratto come nuovi elementi con cui e possibile effettuare solo una operazione: la sottrazione tra punti
- La differenza di due punti è un vettore: $P - Q = \boldsymbol{v}$
- Dato un punto Q ed un vettore $\boldsymbol{v}$, esiste un unico punto P tale che $P - Q = \boldsymbol{v}$
- Si definisce quindi una somma tra un punto ed un vettore il cui risultato e un punto: $P = Q + \boldsymbol{v}$

Punti

- Attenzione: non ho sommato Q da entrambe le parti dell'equazione precedente
- L'interpretazione geometrica è immediata; i punti sono locazioni nello spazio e la differenza di due punti e data dal vettore che li congiunge; e importante non confondere punti e vettori, sono entità geometriche ben distinte.

Combinazioni affini

- Non è definita una somma tra punti e neppure un prodotto di uno scalare per un punto; in generale sono operazioni non lecite, ma c'è una eccezione
- Si prendano tre punti P, Q ed O e si consideri il seguente punto $$P' = \alpha(P - O) + \beta(Q - O) + O$$
- P' non dipende da O, ma solo dai punti P e Q, se e solo se $$\alpha + \beta = 1$$
- In questo caso P' è la combinazione affine di P e Q, e si scrive, a volte in modo improprio, come somma pesata dei punti
- La combinazione affine di due punti distinti descrive la retta passante per i due punti.

Combinazioni affini

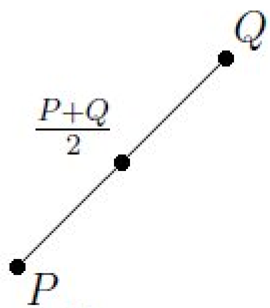
- La combinazione affine si estende in modo naturale a n punti

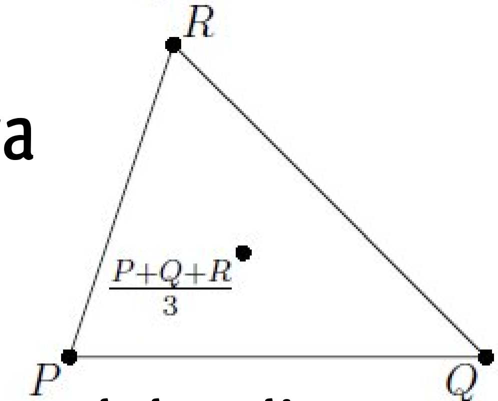
$$P' = \sum_i \alpha_i P_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1 \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

- Un insieme di punti si dice affinemente indipendente se nessun punto e combinazione affine degli altri.

Combinazione convessa

- La combinazione convessa e una combinazione affine con pesi positivi.
- Nel caso della combinazione convessa di due punti, il punto risultante giace sul segmento che congiunge i due punti. Se i pesi sono entrambi pari a 0.5, il punto risultante si trova a metà tra i due

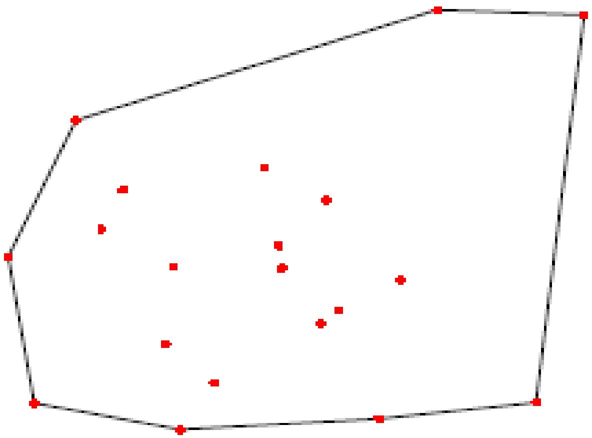




- Nel caso di n punti che formano un poligono convesso, il punto risultante si trova all'interno del poligono. Se tutti i pesi sono uguali a 1/n, il punto risultante si chiama centroide dell'insieme dei punti.

Guscio convesso

- Un insieme C in $\mathbb{R}^n$ è convesso se per ogni coppia di punti P_1, P_2 appartenenti a C si ha che $P' = \alpha(P_1 - P_2) + P_2$ appartiene a C per ogni α in $[0, 1]$ ovvero tutti i punti sul segmento che unisce P_1 con P_2 appartengono all'insieme C
- Il guscio convesso (convex hull) di un insieme di punti è la più piccola regione convessa che contiene tutti i punti dati.



Prodotto interno

- In uno spazio affine non è ancora definito il concetto di distanza o di angolo tra vettori; questi li si ottiene passando ad uno spazio euclideo che e uno spazio affine provvisto di
- un prodotto interno tra vettori che soddisfa le seguenti relazioni

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \in S$$

$$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \beta \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0 \quad (\mathbf{v} \neq \mathbf{0})$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$$

Lunghezze

- Se il prodotto interno di due vettori e nullo, diremo che i due vettori sono ortogonali.
- Grazie al prodotto interno e possibile definire la lunghezza di un vettore (e quindi la distanza tra due punti) e l'angolo tra due vettori

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad \cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|}$$

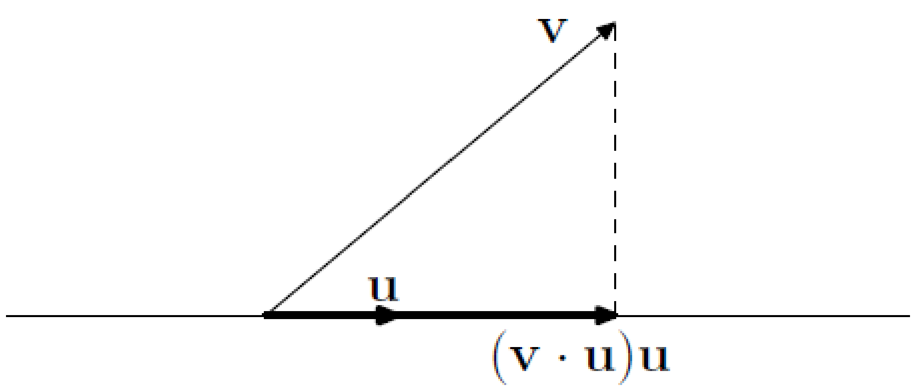
Lunghezze

- Se il prodotto interno di due vettori e nullo, diremo che i due vettori sono ortogonali.
- Grazie al prodotto interno e possibile definire la lunghezza di un vettore (e quindi la distanza tra due punti) e l'angolo tra due vettori

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad \cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|}$$

Proiezione sulla retta

- Il prodotto scalare può essere usato, ad esempio, per trovare la proiezione di un vettore lungo una retta
- Sia dato il vettore v e la retta con direzione identificata dal vettore di lunghezza unitaria u; il vettore ottenuto proiettando v lungo la retta sarà della forma $\mathbf{v}' = t\mathbf{u}$ dove t è un parametro
- si può dimostrare che $t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$



Normalizzazione

- Un vettore è normalizzato se la sua lunghezza è 1; dato un vettore qualsiasi lo si può normalizzare moltiplicandolo per il reciproco della sua lunghezza.
  - Un vettore normalizzato si dice anche **versore**
- Una base è ortonormale se e formata da versori a due a due ortogonali

$$(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) : \|\mathbf{e}_i\| = 1 \, \forall i \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \; \forall \, i \neq j$$

- Data una base ortonormale il prodotto interno tra due vettori si esprime come somma dei prodotti delle componenti (usuale prodotto scalare di vettori)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

  - data una base qualsiasi e sempre possibile derivare da essa una base ortonormale (procedimento di Gram-Schmidt)

Terne

- In tre dimensioni una base ortonormale si dice destrorsa, se la rotazione attorno ad $\boldsymbol{e}_3$ che porta $\boldsymbol{e}_1$ a coincidere con $\boldsymbol{e}_2$ è antioraria se vista dalla parte positiva di $\boldsymbol{e}_3$.
  - Se tale rotazione e oraria allora la base è sinistrorsa
- Si può usare la prima regola della mano destra:
  - se si pone il pollice nella direzione di $\boldsymbol{e}_3$, la rotazione che porta $\boldsymbol{e}_1$ in $\boldsymbol{e}_2$ deve seguire il modo naturale con cui si piegano le altre dita.
- Oppure la seconda regola della mano destra:
  - se si riesce a porre i tre vettori in corrispondenza con pollice, indice, medio della mano destra, perpendicolari tra loro, la base è destrorsa.
- La scelta dell'orientamento è arbitraria, basta essere coerenti
  - Se non specificato diversamente useremo basi destrorse

Riferimenti

- Il concetto di base si estende a quello di riferimento in uno spazio affine (o euclideo) specificando, oltre alla base, anche un punto O detto origine del riferimento.
- Ddato un riferimento *(e_1, e_2, e_3 ,O)*, i punti ed i vettori dello spazio saranno esprimibili nel seguente modo:

$$\mathrm{v} = v_1\mathrm{e}_1 + v_2\mathrm{e}_2 + v_3\mathrm{e}_3$$

$$P = p_1\mathrm{e}_1 + p_2\mathrm{e}_2 + p_3\mathrm{e}_3 + O$$

- Un riferimento **cartesiano** è dato da una base di vettori ortonormale
- Un riferimento è destrorso se lo è la sua base.

Coordinate omogenee

- Definiamo il prodotto di un punto per 1 e per 0

$$P \cdot 1 = P \qquad P \cdot 0 = 0$$

- In questo modo possiamo definire le coordinate omogenee di un punto e di un vettore rispetto al riferimento (e_1, e_2, e_3, O)

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, 0)$$

$$P = (p_1, p_2, p_3, 1)$$

- La scelta di 0 e 1 come ultima coordinata per vettori e punti è arbitraria, andrebbe bene qualsiasi valore
  - Tale scelta però permette il **type checking**: si trattano le 4-ple delle coordinate omogenee come vettori quando si effettua una qualsiasi combinazione lineare di punti e vettori, usando le usuali regole, se l'ultima coordinata del risultato è 0, allora il risultato e un vettore; se è pari a 1 allora il risultato e un punto!
  - Se non e ne 0 ne 1, allora si è effettuata una operazione non lecita

Riepilogo: spazio euclideo 3D

- Gli scalari sono numeri reali
- I vettori identificano direzioni nello spazio
- I punti determinano posizioni nello spazio
- Operazioni ammesse:
  - somma e prodotto tra scalari, prodotto di scalari per vettori, somma di vettori, differenza di punti, somma di un punto con un un vettore, combinazioni affini.
- Il prodotto scalare permette di determinare la lunghezza dei vettori, la distanza tra punti e l'angolo tra due vettori
- Conviene lavorare in una base ortonormale; in questo caso il prodotto scalare tra due vettori e particolarmente semplice
- I tre assi che formano la base si chiamano assi coordinati e si indicano con x, y e z (a volte useremo anche 1, 2 e 3).

Prodotto vettore

- Nel caso particolare delle tre dimensioni è utile introdurre un'ulteriore operazione tra vettori: il prodotto vettore
- Si tratta di un caso particolare di prodotto denominato esterno; in tre dimensioni particolarmente semplice:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$$

- Si dimostra che il prodotto vettore di due vettori ***u*** e ***v*** è un vettore ortogonale al piano contenente i due vettori e di modulo pari all'area definita da ***u*** e ***v***. Il verso è scelto in modo tale che (***u***, ***v***, ***u*** X ***v***) formino una terna destrorsa
  - Attenzione: il prodotto vettore (a differenza delle proprietà affini dello spazio) dipende dalla scelta del tipo di base, destrorsa o sin.

Matrici e trasformazioni

- Una matrice è essenzialmente un array bidimensionale di elementi; per i nostri scopi gli elementi saranno sempre degli scalari, tipicamente numeri reali.
- Una matrice A con M righe ed N colonne si scrive nel seguente modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

- Una matrice in cui N = M si dice quadrata
- Il caso limite in cui M = 1 coincide con la rappresentazione algebrica di un vettore (o con la N-pla delle sue componenti)

- Una matrice A puo essere moltiplicata per uno scalare β ottenendo una matrice C = βA definita nel seguente modo:

$$c_{ij} = \beta a_{ij} \quad \forall i, j$$

- Due matrici A e B si possono sommare se e solo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne; in tal caso si ha C = A + B data da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

- Il prodotto tra matrici e definito solo quando il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda. Se A e una matrice NxM e B e una matrice MxK, allora si ha C = AB (di dimensioni NxK) data da:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{M} a_{il} b_{lj}$$

Il prodotto tra matrici è associativo ((AB)C = A(BC)), ma non commutativo (in generale AB≠BA)

Matrice trasposta

- indicata con il simbolo A^T, è la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A

$$a^T_{ij} = a_{ji}$$

- Quindi se A è NxM, allora la sua trasposta è MxN.
- Per i vettori trasporre equivale a trasformare un vettore riga in un vettore colonna e viceversa
- D'ora in poi quando parleremo di trasformazione di un vettore **v** con una matrice A intenderemo sempre l'usuale prodotto di matrici tra A e il trasposto di v inteso come matrice con una sola colonna, es.

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$$

Determinante

- Importante parametro per le matrici quadrate, indicato con il simbolo $\det A$ o con il simbolo $|A|$. Si definisce ricorsivamente:
- il determinante di una matrice 2x2 è definito da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- il determinante di una matrice NxN e dato dalla formula

$$\det A = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+k} a_{jk} det A_{jk}$$

- dove k e una colonna qualsiasi di A e dove il simbolo A_{jk} indica la matrice (N-1)x(N-1) ottenuta da A eliminando la riga j e la colonna k. Si può dimostrare che det(AB) = detA detB

Identità

La matrice identità di ordine N è definita come una matrice quadrata NxN con tutti gli elementi fuori diagonale nulli e gli elementi sulla diagonale pari a 1

Data una matrice quadrata A questa si dice invertibile se esiste una matrice, indicata con A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

In tal caso A^{-1} si chiama inversa di A

Si può dimostrare che una matrice e invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0; in tal caso si ha

$$a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

Matrici come trasformazioni

Abbiamo visto cosa significa applicare una matrice ad un vettore

- Le matrici quadrate rappresentano quindi delle applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sé (formano un gruppo non abeliano)
- Tutte le applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sé sono esprimibili tramite matrici quadrate
- L'applicazione di più di una matrice ad un vettore si effettua sfruttando l'algebra delle matrici; ad esempio applicare prima A, poi B ed inne C equivale ad applicare la matrice CBA

Matrici come cambiamento di base

- Abbiamo detto che dato uno spazio vettoriale esistono infinite basi. Nella rappresentazione concreta il cambiamento da una base ad un'altra è descritto da una matrice
  - Attenzione: prima abbiamo parlato di applicare una matrice ad un vettore per ottenere un nuovo vettore trasformato;
  - adesso invece vogliamo una matrice che si applichi alle componenti di un vettore per ottenere le nuove componenti rispetto ad un'altra base dello stesso vettore.
- Studiamo il caso concreto di uno spazio vettoriale in 3D

Matrici come cambiamento di base

- Siano (e_1, e_2, e_3) e (e'_1, e'_2, e'_3) due basi ortonormali per lo spazio vettoriale
- Sia T la trasformazione che manda e_i in e_i' i = 1; 2; 3
- Si puo dimostrare che tale trasformazione esiste e che $t_{ij} = e_i' \cdot e_j$
- Il generico vettore $v = (v_1; v_2; v_3)$ viene trasformato da T nel vettore $\mathbf{v}' = T\mathbf{v}$
- Fino ad ora abbiamo parlato di vettori in modo indipendente dalle componenti e quindi dalla base

Matrici come cambiamento di base

- Siano $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ e $(\boldsymbol{e'}_1, \boldsymbol{e'}_2, \boldsymbol{e'}_3)$ due basi ortonormali per lo spazio vettoriale
- Sia T la trasformazione che manda $\boldsymbol{e}_i$ in $\boldsymbol{e}_i'$ i = 1; 2; 3
- Si puo dimostrare che tale trasformazione esiste e che la corrispondente matrice ha $t_{ij} = \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j$
- Il generico vettore $v = (v_1, v_2, v_3)$ viene trasformato da T nel vettore $\mathbf{v}' = T\mathbf{v}$
- Fino ad ora abbiamo parlato di vettori in modo indipendente dalle componenti e quindi dalla base

- Le componenti di **v**' nella base $\{e_i'\}$ sono uguali alle componenti di **v** nella base $\{e_i\}$ (perché lo trasformo assieme alla base).
- Sia quindi A la matrice

del cambiamento di coordinate cercata, avremo:

$$\mathbf{v}' = T\mathbf{v}$$

$$A\mathbf{v}' = AT\mathbf{v}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = AT \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

- Dovendo questa relazione valere per ogni **v** si ha $A = T^{-1}$
  - Abbiamo dunque trovato la matrice A che trasforma le coordinate di un vettore dalla base $\{e_i\}$ alla base $\{e_i'\}$

- La matrice che trasforma le coordinate dalla base $\{e_i'\}$ alla base $\{e_i\}$ sarà ovviamente A^{-1}, ovvero T
- Le componenti di **v** cambiano non perche **v** venga trasformato in un nuovo vettore, ma perché è cambiata la base rispetto alla quale sono definite le componenti dei vettori.
- In generale dato un vettore (v_1, v_2, v_3), la sua trasformazione in (v'_1, v'_2, v'_3) tramite la matrice B puo essere vista o come una trasformazione identificata da B del vettore fissata la base, oppure come un cambiamento di base indotto dalla matrice B^{-1} tenendo fisso il vettore
- Nel primo caso si parla di **trasformazione attiva** sullo spazio, nel secondo caso di **trasformazione passiva**

Trasformazioni affini

- Per definire una trasformazione in genere studieremo come si trasforma un punto generico e da questo ricaveremo la matrice di ordine 4 che agisce sulle coordinate omogenee del punto.
- Una trasformazione affine preserva le combinazioni affini, cioè rette parallele vengono trasformate in rette parallele.
- Usando le coordinate omogenee, si può rappresentare ogni trasformazione affine con una matrice (questo e uno dei motivi per usare le coordinate omogenee, l'altro è legato alle proiezioni).

Traslazione

- Una traslazione determinata dal vettore t trasforma il punto P nel punto

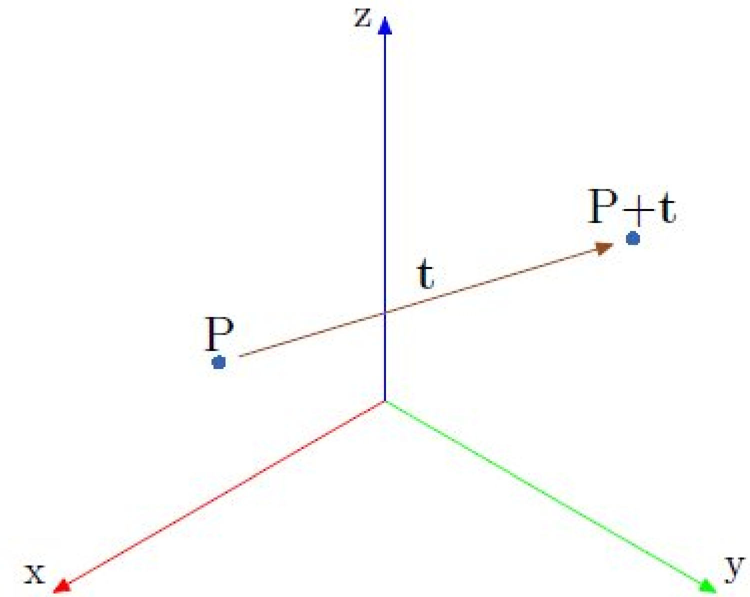
$$P' = P + \mathbf{t}$$

In termini di componenti

$$\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z, 0)$$

$$P = (p_x, p_y, p_z, 1)$$

$$P' = (p_x + t_x, p_y + t_y, p_z + t_z, 1)$$



- E' facile vedere che la matrice di trasformazione T_t per le coordinate omogenee è quella qui a destra

$$T_{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

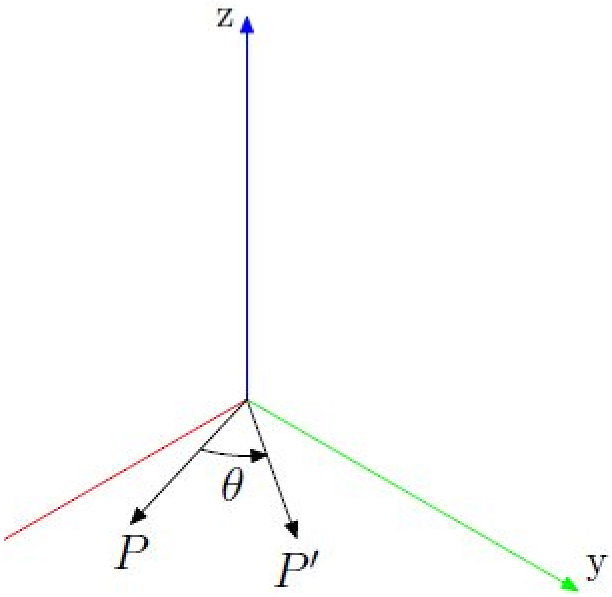
Traslazione

- Si vede subito da questa matrice che i vettori non vengono modificati da una traslazione
- $T^{-1}_{t} = T_{-t}$
- E' dimostrato che se non si fa uso delle coordinate omogenee, ovvero non si distinguono punti e vettori, non e possibile dare una rappresentazione matriciale alla traslazione.
- Questo giustifica parzialmente lo sforzo di introdurre i concetti di spazio affine e di punto rispetto a limitarsi ai soli spazi vettoriali.

Rotazione rispetto a un asse

- Una rotazione di un angolo θ in senso antiorario (prima regola della mano destra) intorno all'asse z determina la seguente trasformazion di un punto P in P'

$$
\begin{aligned}
p'_x &= p_x \cos(\theta) - p_y \sin(\theta) \\
p'_y &= p_x \sin(\theta) + p_y \cos(\theta) \\
p'_z &= p_z
\end{aligned}
$$



- Si può facilmente dimostrare che per rotazioni intorno all'asse x e y si hanno le seguenti espressioni:'

$$
\begin{aligned}
p'_y &= p_y \cos(\theta) - p_z \sin(\theta) \\
p'_z &= p_y \sin(\theta) + p_z \cos(\theta) \\
p'_x &= p_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p'_z &= p_z \cos(\theta) - p_x \sin(\theta) \\
p'_x &= p_z \sin(\theta) + p_x \cos(\theta) \\
p'_y &= p_y
\end{aligned}
$$

Rotazioni

- Dovrebbe a questo punto essere facile dimostrare che le matrici che rappresentano le rotazioni rispetto agli assi coordinati sono quelle qui riportate
- Da notare che un vettore viene trasformato da una rotazione (a differenza delle traslazioni che lasciano i vettori inalterati)
- Le matrici non commutano

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Le rotazioni rispetto agli assi cartesiani non commutano; provare a ruotare un oggetto di 90 gradi prima rispetto all'asse x e poi rispetto all'asse y. Ripetete quindi l'operazione prima rispetto all'asse y e poi rispetto all'asse x. Risultato?
- Vedremo nel seguito come trattare una rotazione rispetto ad un asse qualsiasi, non solo rispetto ad uno degli assi cartesiani
- Da notare che le rotazioni lasciano inalterati i punti che si trovano sull'asse di rotazione.
- Si può dimostrare che $R_x(\theta)^{-1} = R_x(-\theta)$ e similmente per gli altri assi
- Si può dimostrare che le matrici di rotazione date sopra sono ortogonali, cioè ad es per asse x: $R_x(\theta)^{-1} = R_x(-\theta)^T$
- La proprietà di ortogonalità è vera per ogni rotazione, non solo per quelle rispetto agli assi coordinati

Scalatura

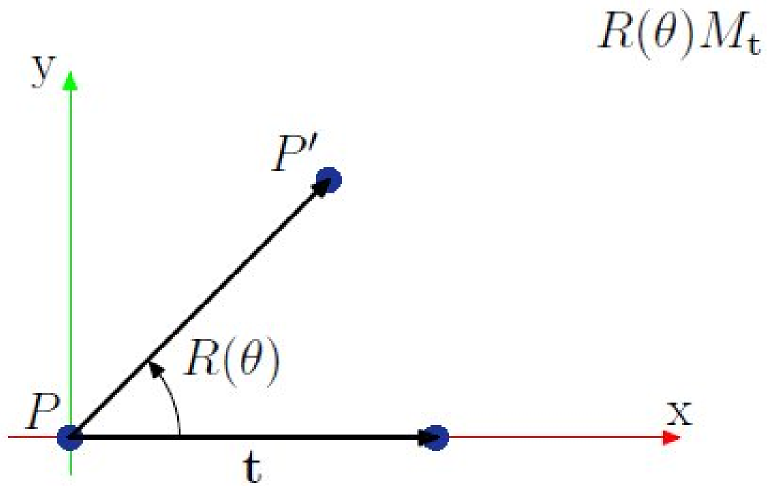
- Traslazioni e rotazioni conservano la lunghezza dei vettori.
  - sottogruppo delle trasformazioni affini chiamato trasformazioni isometriche o rigide.
- Un altro tipo di trasformazione affine che non preserva le distanze è la **scalatura** (ve ne sono anche altre)
- Dato un punto $P = (p_x, p_y, p_z, 1)$ la trasformazione di scala, o scalatura, lo trasforma nel punto $P' = (s_x p_x, s_y p_y, s_z p_z, 1)$ dove i valori (s_x, s_y, s_z) sono i fattori di scala lungo gli assi
- Una scalatura e omogenea se $s_x = s_y = s_z = s$
  - vettori semplicemente allungati (s>1) o accorciati (s<1)
  - Un punto, in una scalatura omogenea, viene invece traslato lungo la retta che passa per l'origine e per il punto stesso

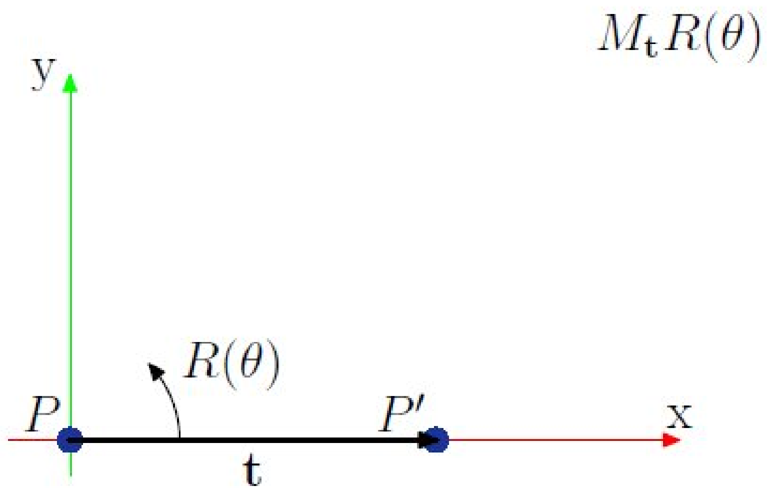
Composizione di trasformazioni

- Le trasformazioni espresse come matrici si compongono usando semplicemente l'algebra delle matrici
- Date due trasformazioni rappresentate dalle matrici A e B, la composizione di A seguita da B sarà data dalla matrice BA.
  - Importante: notare l'ordine delle matrici; siccome si applica la matrice risultante a sinistra del vettore delle coordinate omogenee, la trasformazione che viene effettuata per prima va a destra.

La composizione di trasformazione si estende immediatamente al caso di piu di due matrici $T = T_n \ldots T_1$

Non commutatività

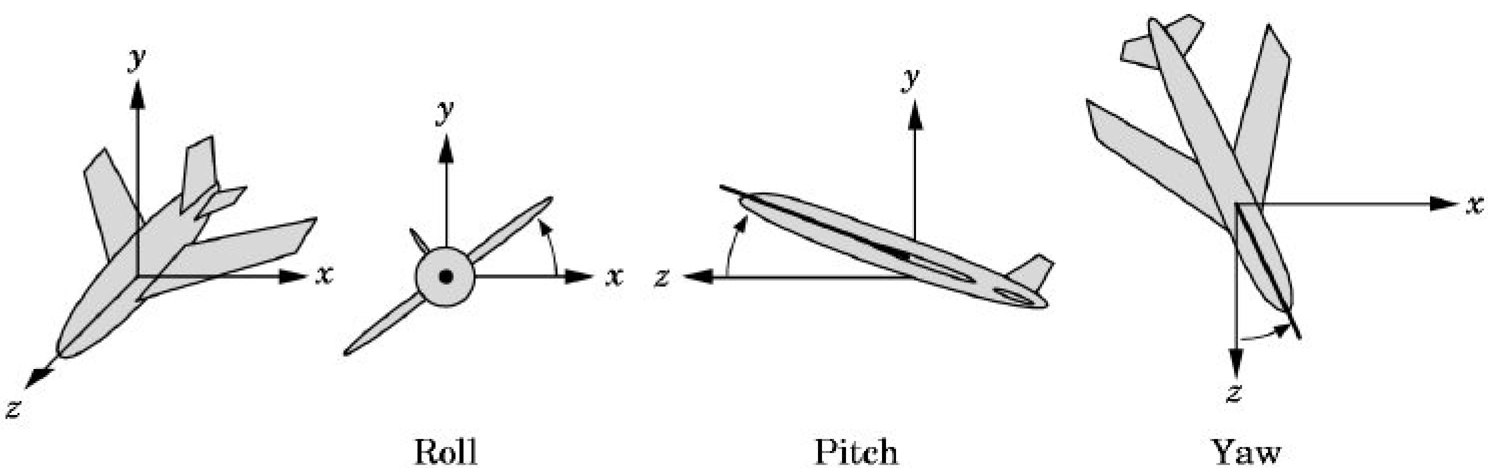




- Esempio: data una traslazione lungo il vettore t ed una rotazione di un angolo lungo l'asse z, si ottiene un risultato diverso effettuando prima la rotazione e poi la traslazione o viceversa
- Per rendersene conto basta guardare come viene trasformato nei due casi un punto che in partenza si trova nell'origine

Rotazioni generiche

- Una rotazione qualsiasi rispetto ad un asse passante per l'origine puo essere decomposta nel prodotto di tre rotazioni rispetto agli assi coordinati; i tre angoli prendono il nome di **angoli di Eulero**
- La rappresentazione con gli angoli di Eulero non è univoca, a terne diverse può corrispondere la stessa trasformazione.
  - Una delle rappresentazioni di Eulero impiega gli angoli roll (rollio), pitch (beccheggio) e yaw (imbardata), di derivazione aeronautica.
  - Per convenzione: $R(\theta_{y,}\theta_{p,}\theta_{R}) = R_{y}(\theta_{y})R_{x}(\theta_{p})R_{x}(\theta_{R})$



Rotazione con asse generico

- Una rotazione $R(\theta,\mathbf{u})$ di un angolo θ attorno all'asse $\mathbf{u}=(u_x,u_y,u_z)$ si rappresenta con la seguente matrice (vedere Buss, cap.2), dove $c = \cos(\theta)$ e $s = \sin(\theta)$:

$$R(\theta,\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (1-c)u_x^2+c & (1-c)u_xu_y - su_z & (1-c)u_xu_z + su_y & 0 \\ (1-c)u_xu_y + su_z & (1-c)u_y^2+c & (1-c)u_yu_z - su_x & 0 \\ (1-c)u_xu_z - su_y & (1-c)u_yu_z + su_x & (1-c)u_z^2+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Per ruotare attorno ad un asse generico, bisogna traslare l'asse nell'origine, ruotare ed infine applicare la traslazione inversa.
  - Data una matrice di rotazione qualunque (ovvero ortogonale e con determinante positivo), si puo risalire all'asse u ed angolo (formula e dimostrazione sul Buss, cap.2)

Trasformazioni

- Ricapitolando: una trasformazione affine generica si scrive in coordinate 3D

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

- In coordinate omogenee

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c & u \\ d & e & f & v \\ g & h & i & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Se t è il vettore di traslazione e R una matrice di rotazione, la trasformazione in coordinate omogenee è

$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cambio di riferimento

- L'idea di cambiamento di base (trasformazione passiva) che abbiamo gia affrontato si ripropone negli stessi termini per i sistemi di riferimento
- Dati due riferimenti (e_1, e_2, e_3, O) e (e'_1, e'_2, e'_3, O) si tratta di trovare una matrice 4x4 che permetta di ottenere le coordinate di un punto rispetto al secondo riferimento date le coordinate dello stesso punto rispetto al primo
- Come nel caso dei cambiamenti di base di un riferimento, se T e la trasformazione attiva che manda il primo riferimento nel secondo, allora T^{-1} e la matrice che trasforma le coordinate rispetto al primo riferimento nelle coordinate rispetto al secondo riferimento

Geometria analitica

Ci interessa definire nello spazio le figure geometriche importanti dal punto di vista della modellazione grafica e del rendering

- Rette: sono identificabili da un punto qualsiasi Q che giaccia sulla retta e da una direzione data da un versore u. E facile vedere che sono il luogo dei punti dati da $P = Q + t\mathbf{u} \quad t \in \mathbb{R}$

In termini di componenti si vede facilmente che vale la seguente equazione

$$\frac{x - x_Q}{u_x} = \frac{y - y_Q}{u_y} = \frac{z - z_Q}{u_z}$$

- Se si vuole specificare una retta dati due punti R e Q, basta usare le formule date qui sopra tenendo conto che il versore che identica la retta e dato da $\mathbf{u}=(R-Q)/|R-Q|$

- Semiretta: basta aggiungere il vincolo t>= 0
- Segmenti: dati i punti iniziale e finale P e Q possiamo scriverli come $P = Q + t(R-Q)\ t \in [0; 1]$
- Sfere: dato centro O e raggio r, i punti della superficie sferica sono dati dall'equazione $P = O + r\mathbf{u}$ con $\mathbf{u}$ versore generico.
- Si dimostra facilmente che, in termini delle coordinate, la

superficie sferica è data dall'equazione

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$$

- Piani: dati 3 punti non allineati P, Q ed R il luogo dei punti che descrive il piano che li comprende è la combinazione affine

$$S = \alpha P + \beta Q + \gamma R \quad \alpha,\beta,\gamma \in IR \quad \alpha+\beta+\gamma=1$$

Alternativamente si puo definire un piano a partire da un punto Q che vi appartiene e da un vettore u che ne identica la normale come il luogo dei punti P tali che $(P - Q)\ \mathbf{u} = 0$

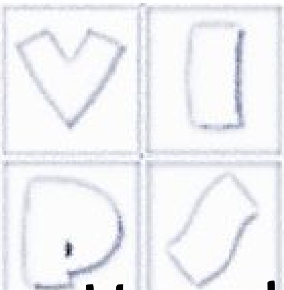
In termini di coordinate abbiamo

$$(x-x')u_x + (y-y')u_y + (z-z')u_z = 0$$

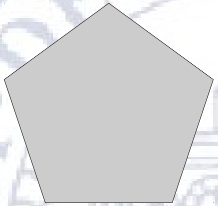
Per passare dalla prima alla seconda rappresentazione basta prendere come punto Q e come vettore $\mathbf{u} = (P-Q) \times (R-Q)$

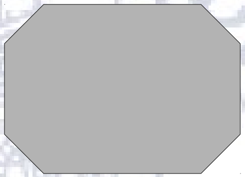
- Semispazi: il piano di cui sopra identica due semispazi, uno positivo ed uno negativo:

$$(P-Q)\,\mathbf{u} > 0$$
$$(P-Q)\,\mathbf{u} < 0$$



Poligoni

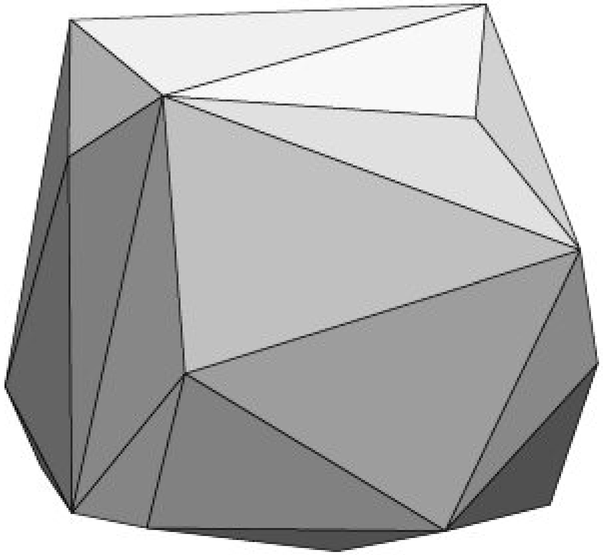




- Un poligono P è un insieme finito di segmenti (spigoli) di IR^2, in cui ogni estremo (vertice) e comune a esattamente due segmenti, che si dicono adiacenti.
- Un poligono è detto semplice se ogni coppia di spigoli non adiacenti ha intersezione vuota.
- Teorema di Jordan: Un poligono semplice P divide il piano in due regioni o facce, una limitata (detta interno di P) ed una illimitata (detta esterno di P).
- Per convenzione, un poligono viene rappresentato dalla sequenza dei suoi vertici $P_1 \ldots P_n$ ordinati in modo che l'interno del poligono giaccia alla sinistra della retta orientata da P_i a P_{i+1}, ovvero i vertici sono ordinati in senso antiorario.

Poliedri

In IR^3 un poliedro semplice e denito da un insieme finito di poligoni (facce) tali che ciascuno spigolo di una faccia e condiviso da esattamente un'altra faccia e le facce non si intersecano che negli spigoli.



Riferimenti

- Scateni et al. Cap 4
- Angel (6 ed) cap. 3.1-3.3
- Buss Cap. 2

Domande di verifica

- Che cosa sono le coordinate omogenee?
- Qual è la differenza tra punti e vettori?
- Come si definisce il determinante di una matrice?
- Quale convenzione si usa generalmente in grafica per l'orientazione dei poligoni?