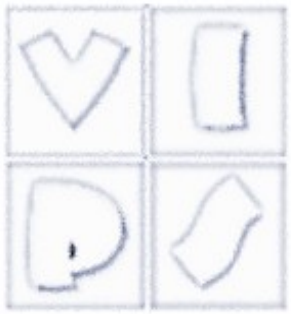
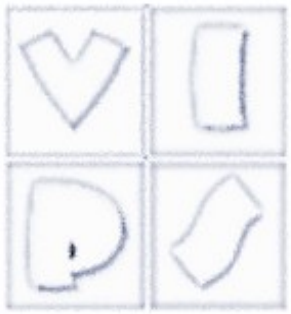


Grafica al calcolatore

-

Computer Graphics

5 - Rendering

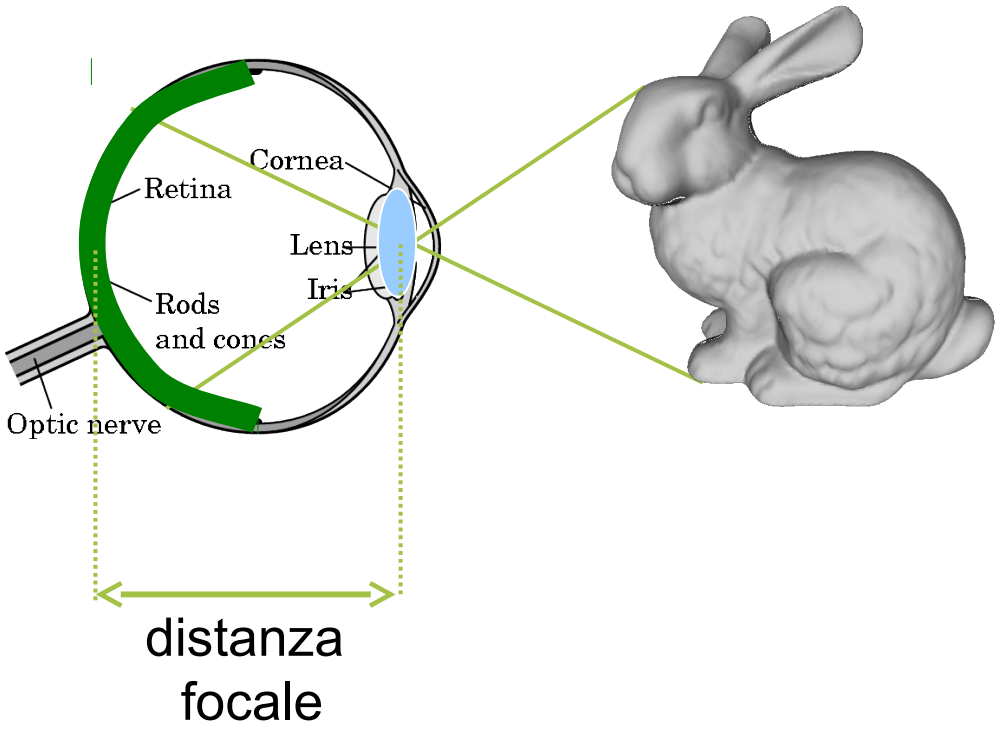


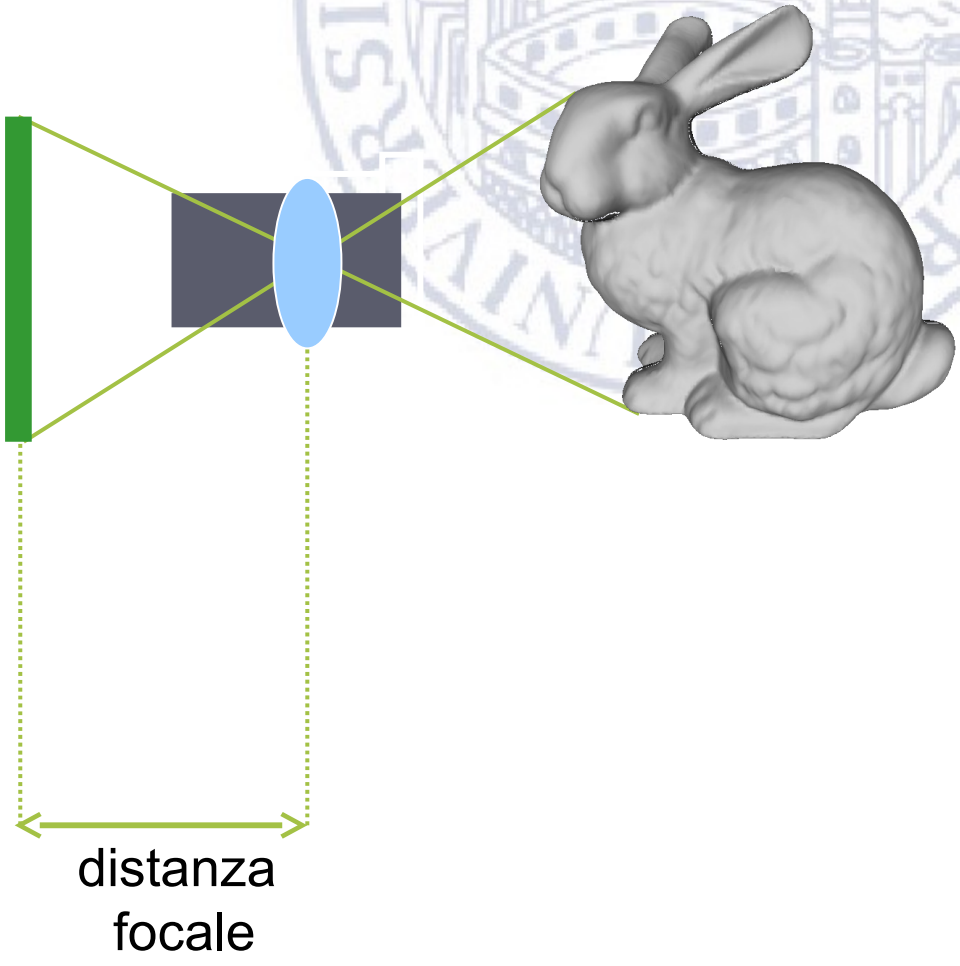
Rendering

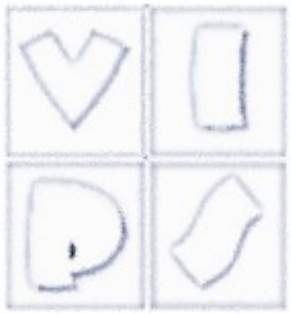
- Il termine rendering indica la serie di algoritmi, geometrici e non, a cui si sottopone una data descrizione di una serie di oggetti per ottenere una immagine
- Dovrebbe quindi simulare la fisica della formazione dell'immagine
- Se il dispositivo di output è 2D, il processo di rendering 3D è assimilabile al processo di formazione di un'immagine da parte di un sistema ottico, quale ad esempio una macchina fotografica
- La visualizzazione consiste nel creare una particolare vista della scena 3D (relazione scena/osservatore)

Il mondo in tre dimensioni

- Il processo di formazione dell'immagine in un sistema ottico





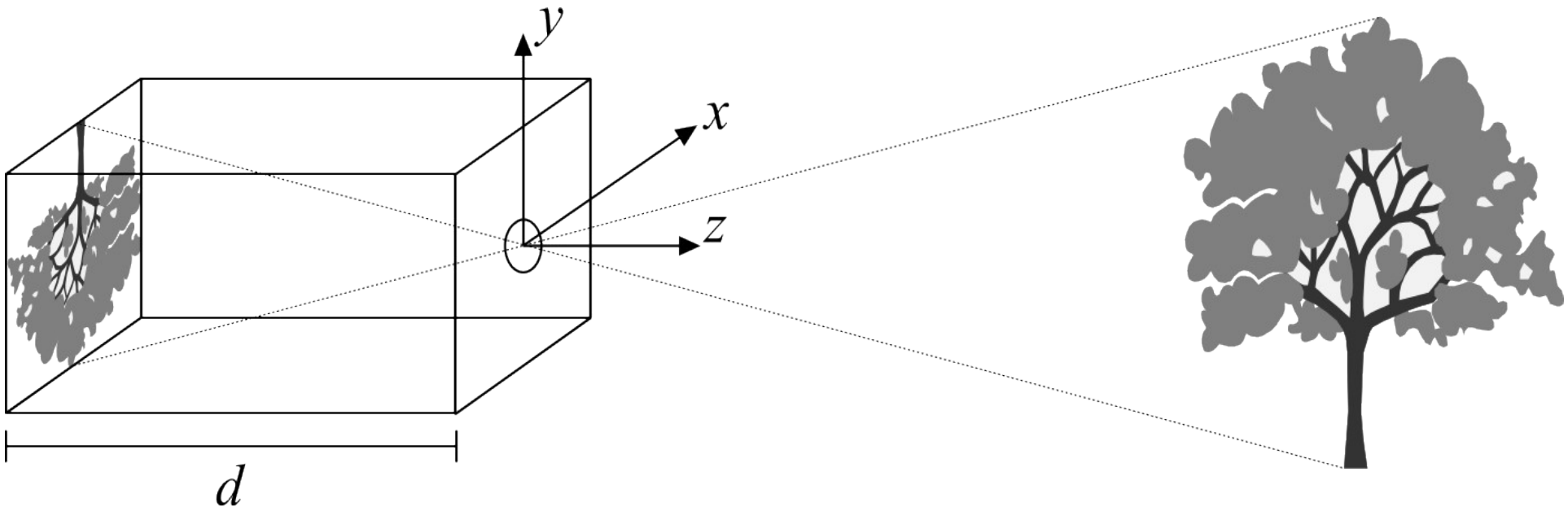


Il mondo in tre dimensioni

- Per effettuare il rendering si deve creare una vista e la definizione del modello nel mondo dell'applicazione è indipendente dalla posizione di osservazione della scena (gli oggetti nel mondo reale sono indipendenti dalle fotografie scattate loro)
- In un sistema grafico, quindi, le funzioni destinate alla modellazione (definizione del mondo dell'applicazione) ed al posizionamento della macchina (dell'osservatore) all'interno della scena sono distinte e separate

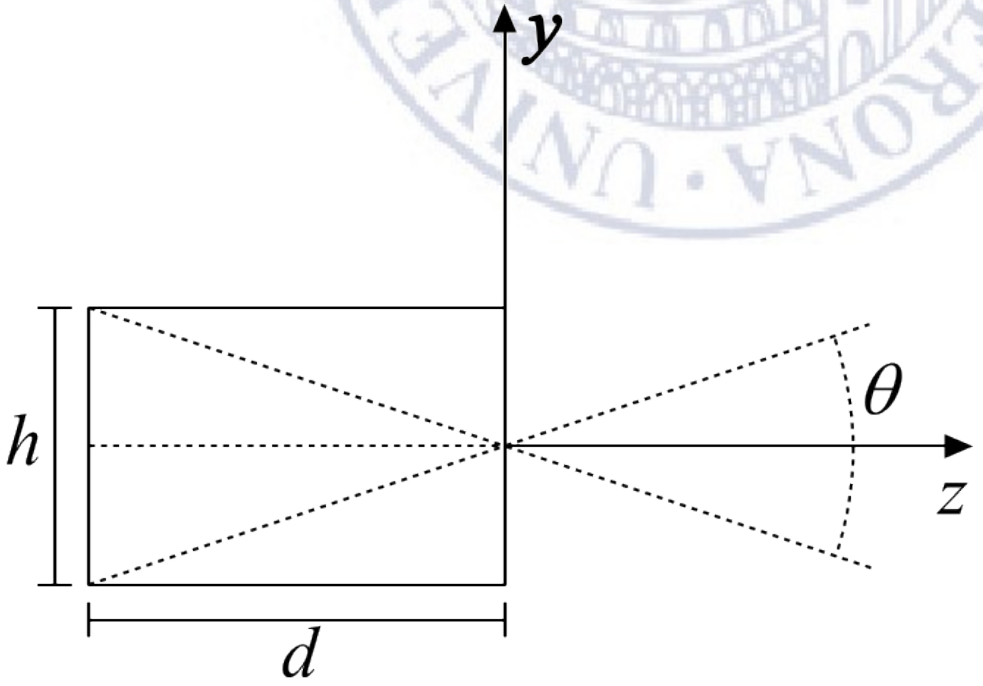
La macchina fotografica virtuale

- La metafora utilizzata per descrivere le relazioni scena/osservatore è quella della macchina fotografica virtuale (synthetic camera).
- Il modello semplice usato anche in Computer vision è la telecamera pinhole



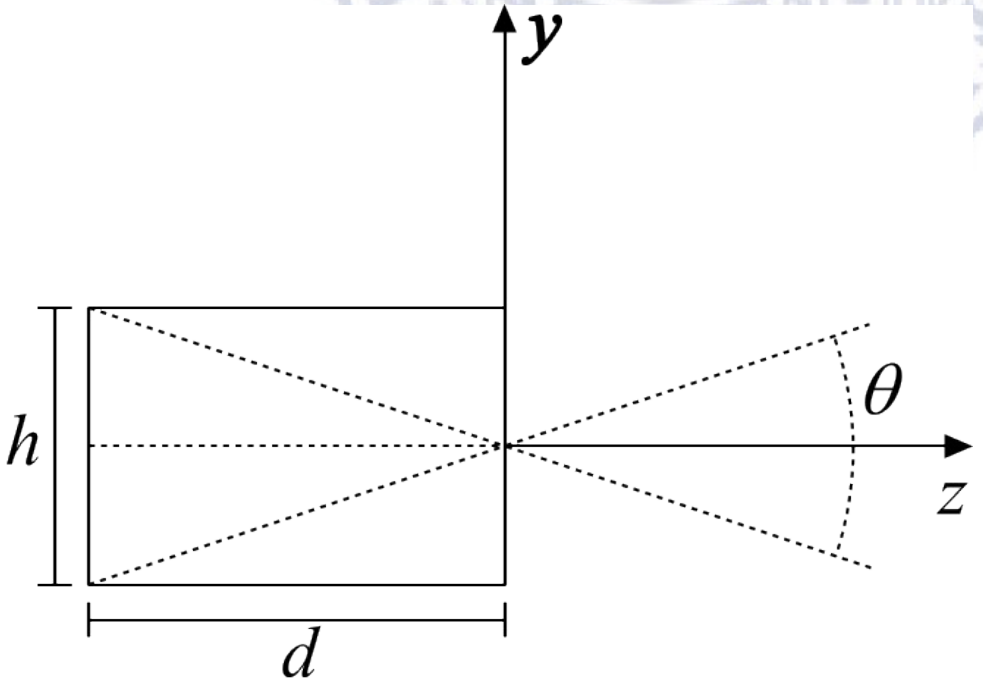
La macchina fotografica virtuale

- La macchina fotografica virtuale è costituita da un parallelepipedo in cui la faccia anteriore presenta un foro di dimensioni infinitesime (pinhole camera) e sulla faccia posteriore si formano le immagini



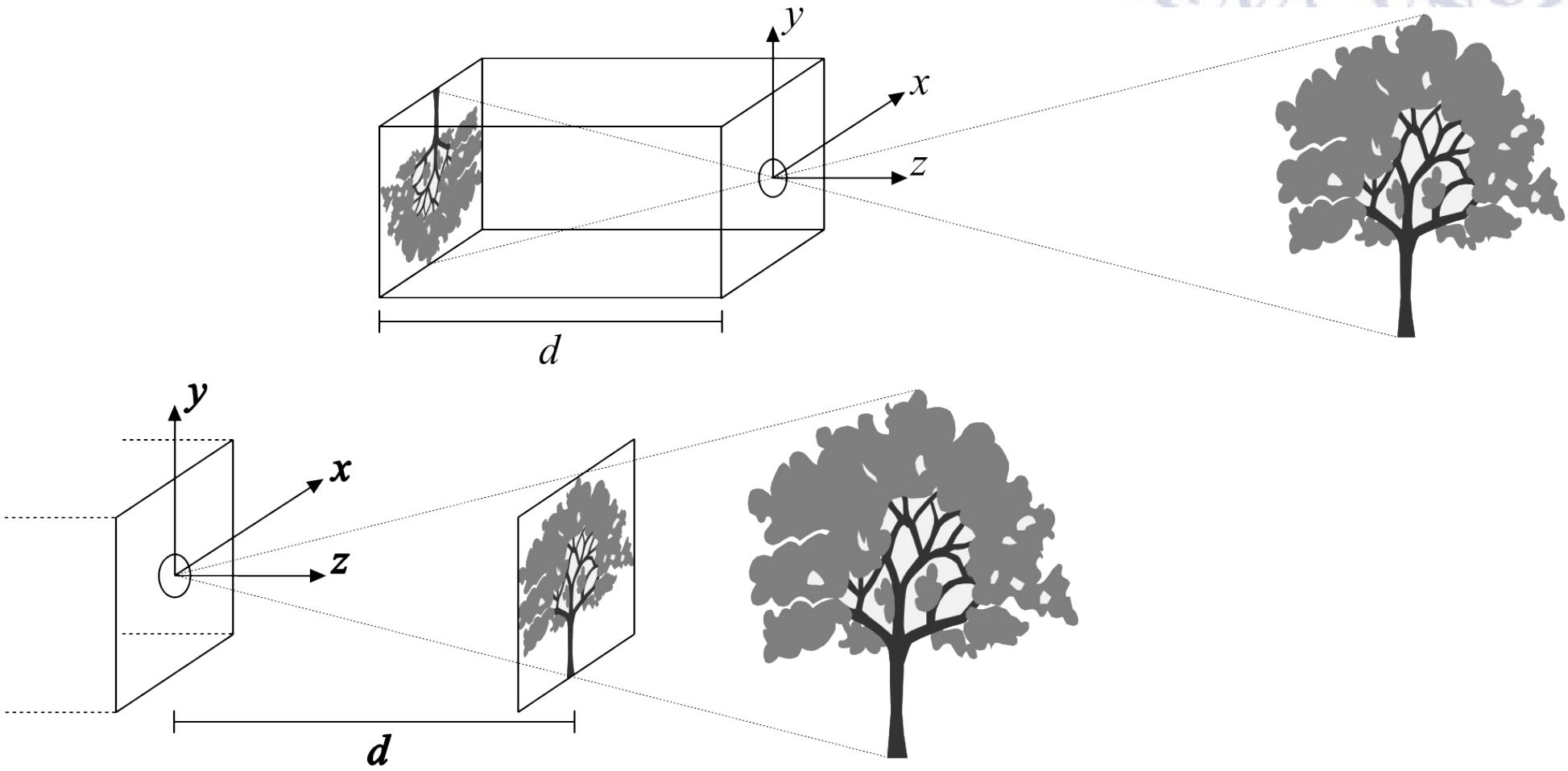
La macchina fotografica virtuale

- Immagini nitide, nessun problema di luminosità, l'angolo di vista può essere modificato variando il rapporto tra la distanza focale (d) e la dimensione del piano immagine



La macchina fotografica virtuale

- Per convenzione (e maggiore semplicità) si assume l'esistenza di un piano immagine tra la scena ed il centro di proiezione



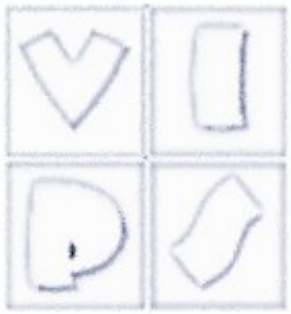
Modello di formazione dell'immagine

- La relazione che lega i punti 3D ai punti sul piano in questa ipotesi è data dalla proiezione prospettica. Con semplici ragionamenti sui triangoli simili si ha che la proiezione di un punto P (x,y,z) è data da
  - x'= -d x/z oppure x'=dx/z per il piano immagine davanti
  - y'= -d y/z oppure y'=dy/z
- In forma matriciale si può effettuare la proiezione prospettica, applicando ai punti rappresentati da $P = (x, y, z, 1)$, la matrice di proiezione prospettica 3 × 4:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 0 \end{pmatrix}$$

Proiezione prospettica

- La proiezione P_0 del punto P sul piano vista si trova in 2 passi:
  - Si applica a P la matrice M ottenendo una 3-pla $\tilde{\tilde{P}} = (x, y, -z/d)$; da notare che non rappresenta un punto in coordinate omogenee 2D secondo la nostra definizione (la terza componente non è pari a 1)
  - Si "normalizza" $\tilde{\tilde{P}}$ dividendo le sue componenti per la terza ed ottenendo $P' = (-xd/z, -yd/z, 1)$ che rappresenta in coordinate omogenee il punto di coordinate cartesiane $P' = (-xd/z, -yd/z)$
  - P0 è la proiezione di P sul piano vista.
- La divisione prospettica (o normalizzazione proiettiva) indica il passaggio da coordinate omogenee a coordinate cartesiane e consiste nel dividere per l'ultima coordinata e rimuovere l'1
- Si perde l'informazione di profondità:, punti con z diversa sono proiettati nello stesso punto sul piano proiettivo



Trasformazioni di proiezione

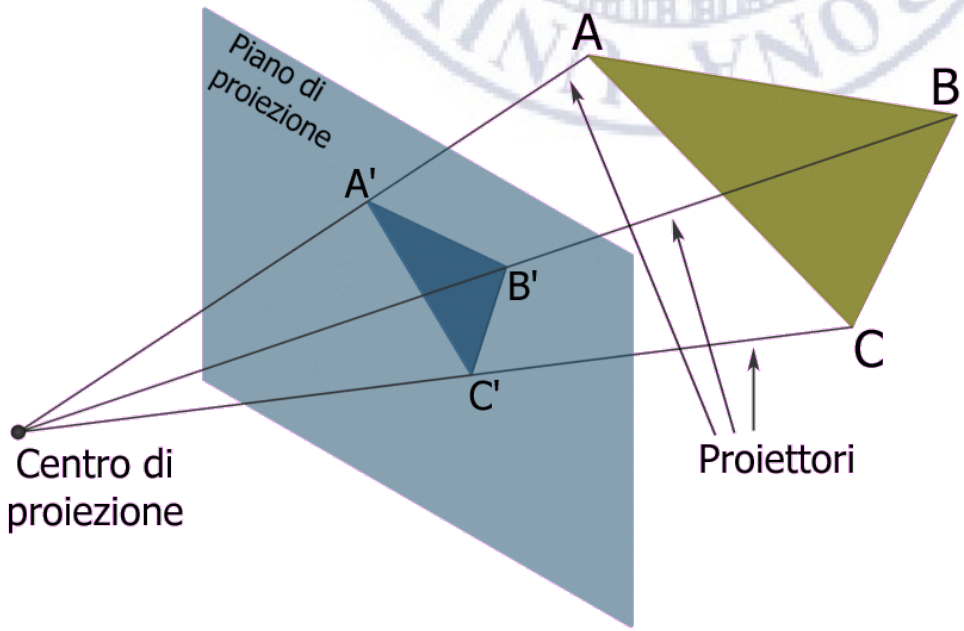
- Si dice proiezione una trasformazione geometrica con il dominio in uno spazio di dimensione n ed il codominio in uno spazio di dimensione minore (es. $n-1$):

$$f : R^n \rightarrow R^m \quad m < n$$

- In computer graphics le trasformazioni di proiezione utilizzate sono quelle dallo spazio 3D (il mondo dell'applicazione) al 2D (la superficie del dispositivo di output)

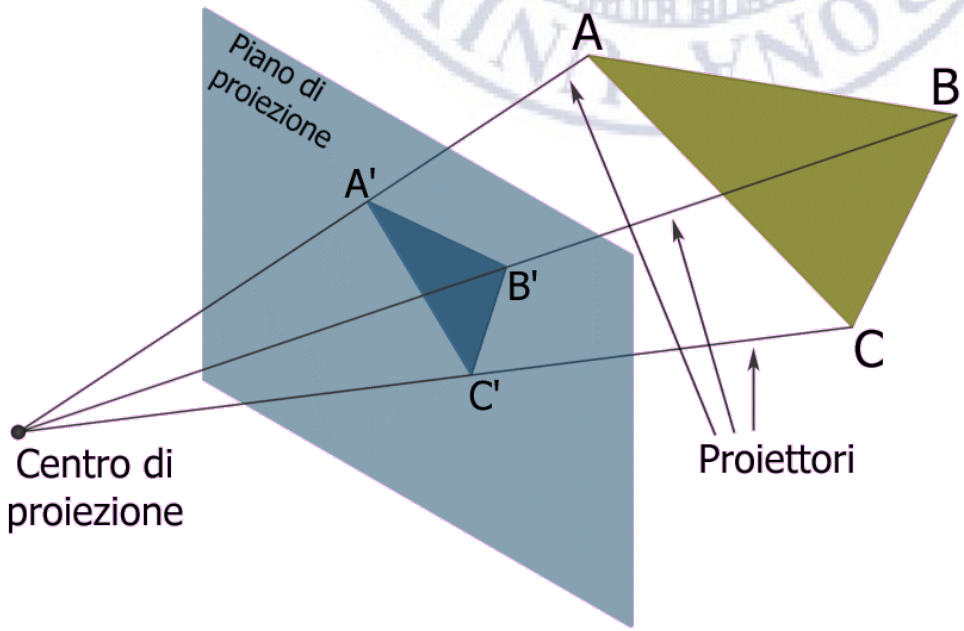
Trasformazioni di proiezione

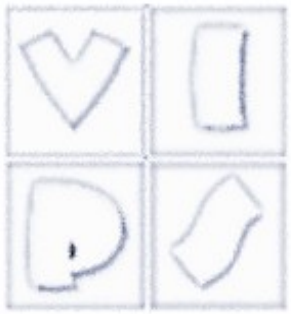
- Da un punto di vista geometrico, la proiezione è definita per mezzo di un insieme di rette di proiezione (i proiettori) aventi origine comune in un centro di proiezione, passanti per tutti i punti dell'oggetto da proiettare ed intersecanti un piano di proiezione



Trasformazioni di proiezione

- La proiezione di un segmento è a sua volta un segmento
- Non è quindi necessario calcolare i proiettori di tutti i punti di una scena, ma solo quelli relativi ai vertici delle primitive che la descrivono





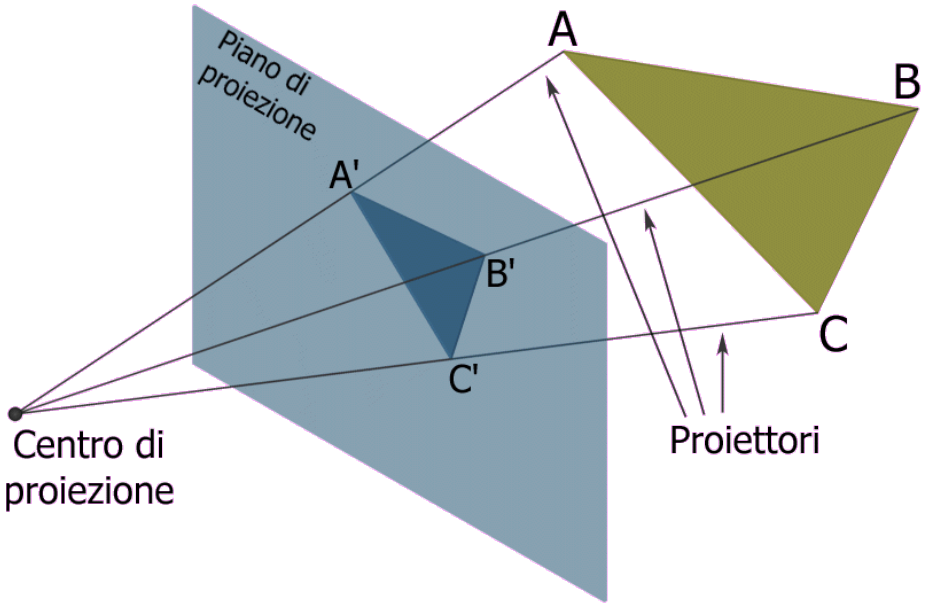
Trasformazioni di proiezione

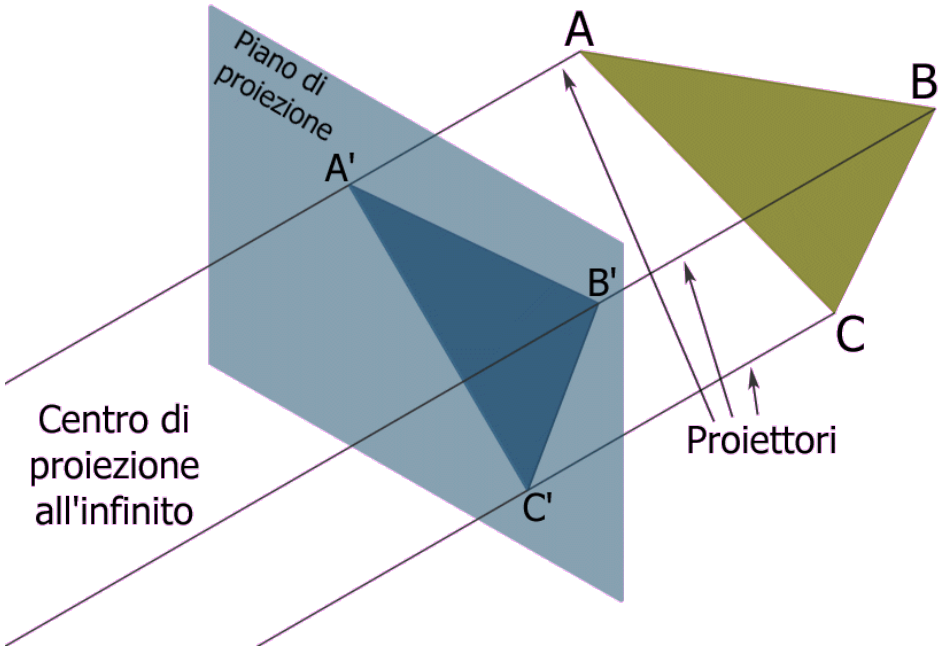
- Le proiezioni caratterizzate da:
  - proiettori rettilinei (potrebbero essere curve generiche)
  - proiezione giacente su un piano (potrebbe essere su una superficie generica)

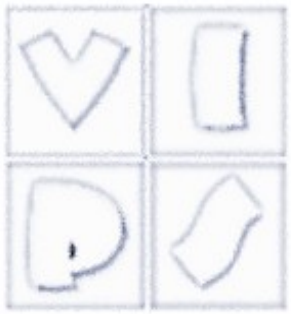
  prendono il nome di proiezioni geometriche piane
- Molte delle proiezioni cartografiche, per esempio, non sono proiezioni geometriche piane

Trasformazioni di proiezione

- Le proiezioni geometriche piane si classificano in:
  - Proiezioni prospettiche (distanza finita tra il centro ed il piano di proiezione)
  - Proiezioni parallele (distanza infinita tra il centro ed il piano di proiezione)





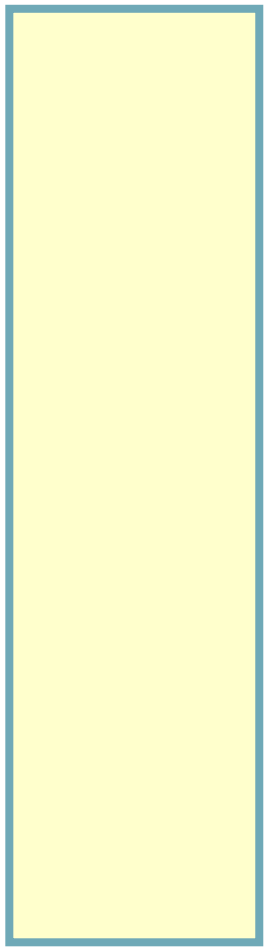


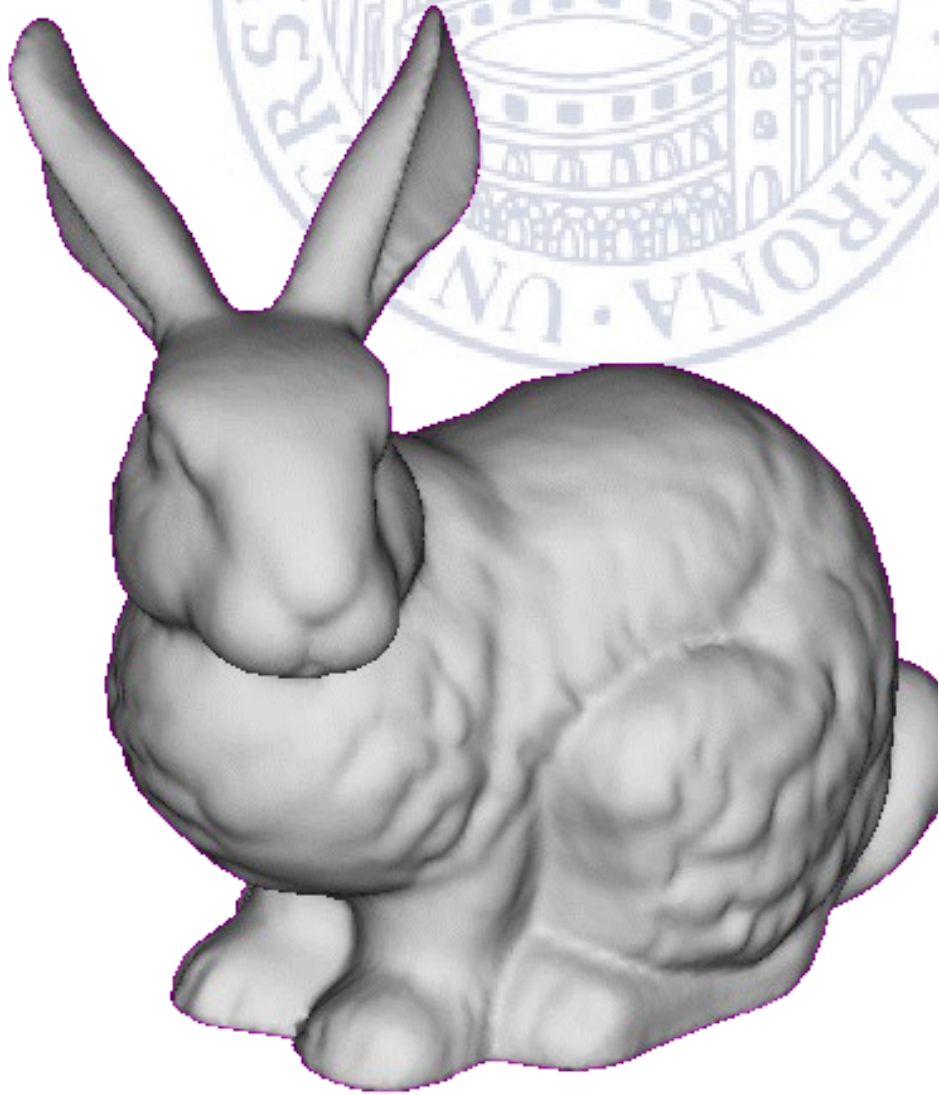
Trasformazioni di proiezione

- Le proiezioni parallele prendono il nome dai proiettori che sono, appunto, tra loro tutti paralleli
- Mentre per una proiezione prospettica si specifica un centro di proiezione, nel caso di proiezione parallela si parla di direzione di proiezione
- La proiezione prospettica è più realistica della parallela in quanto riproduce la visione reale (gli oggetti appaiono di dimensione decrescenti via via che ci si allontana dall'osservatore)

Proiezioni prospettiche

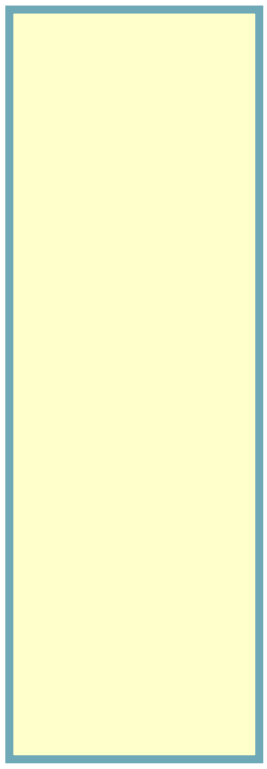
- Al variare della distanza focale (d)

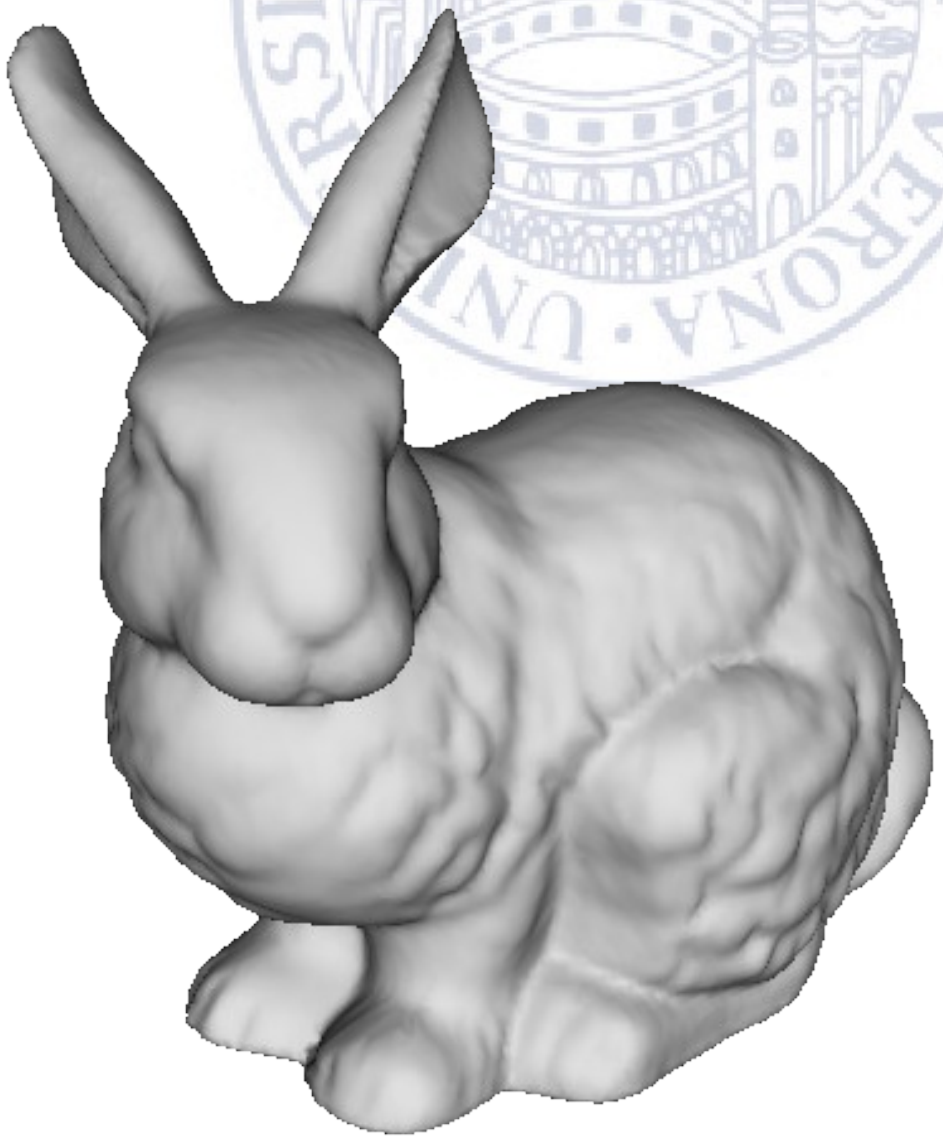




Proiezioni prospettiche

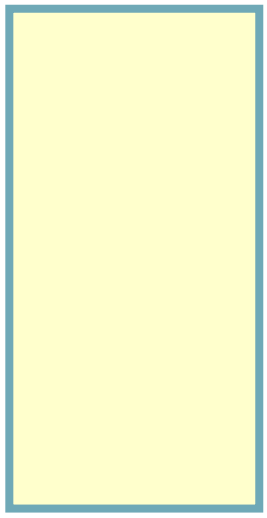
- Al variare della distanza focale (d)

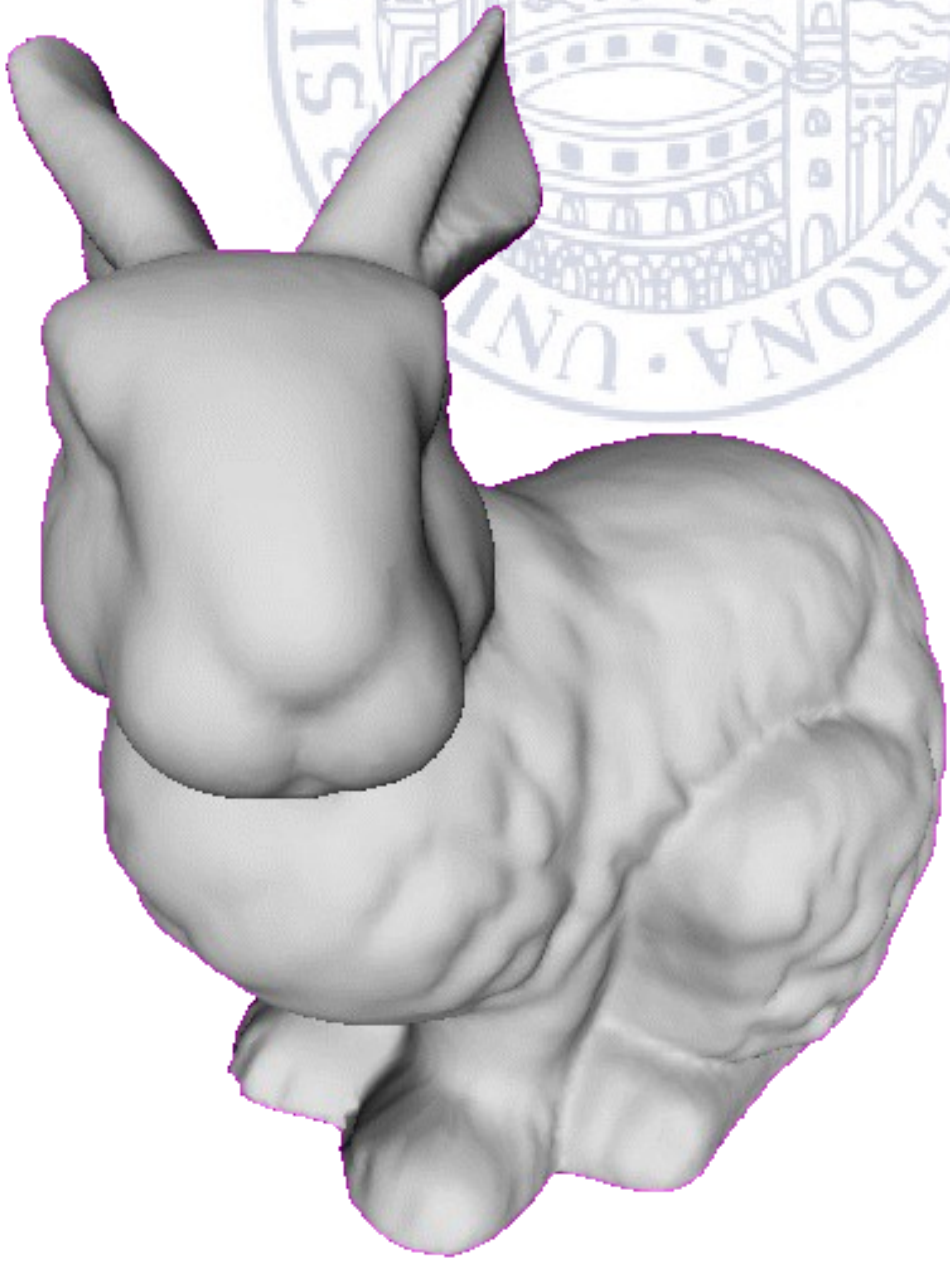




Proiezioni prospettiche

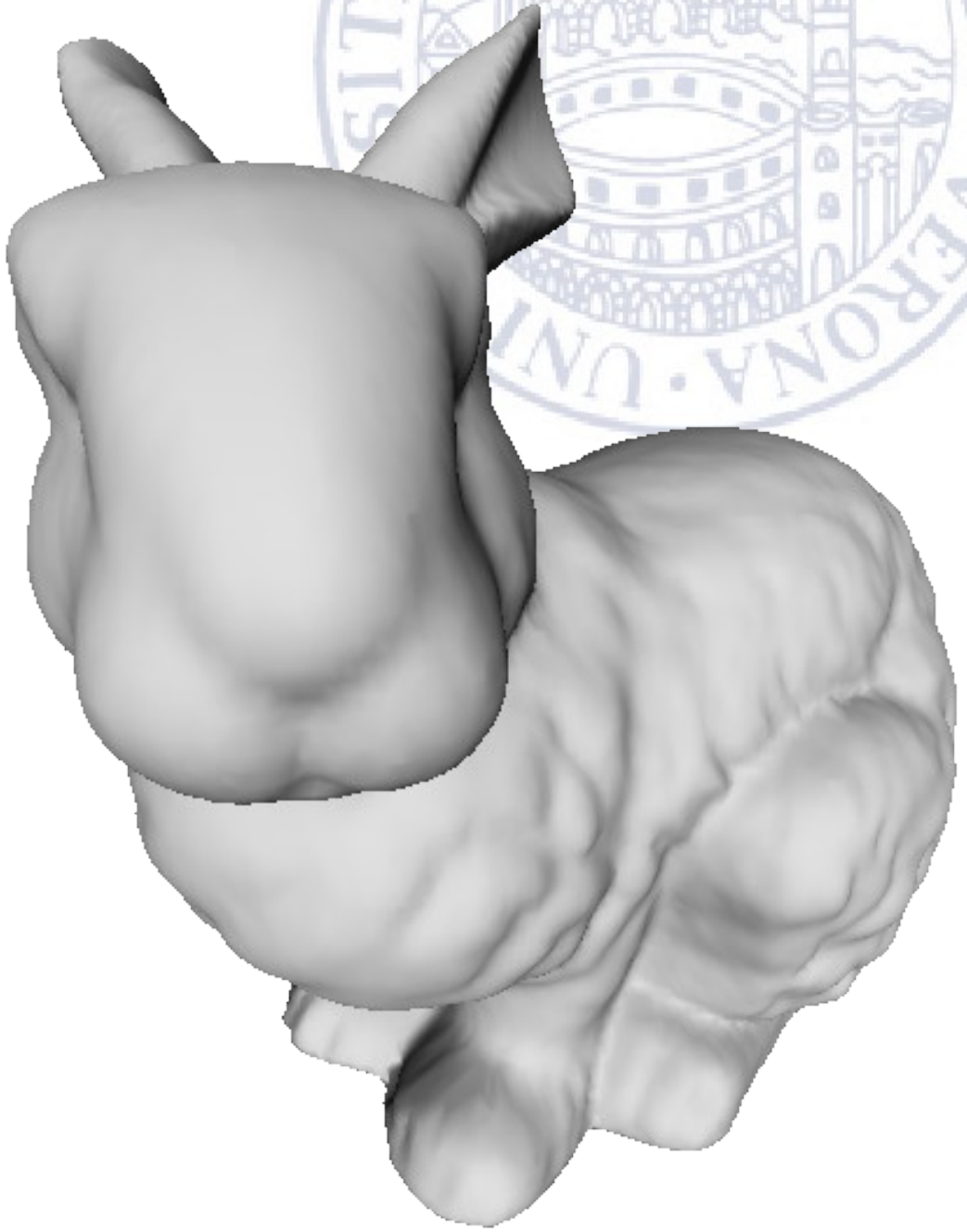
- Al variare della distanza focale (d)

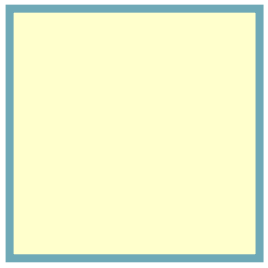




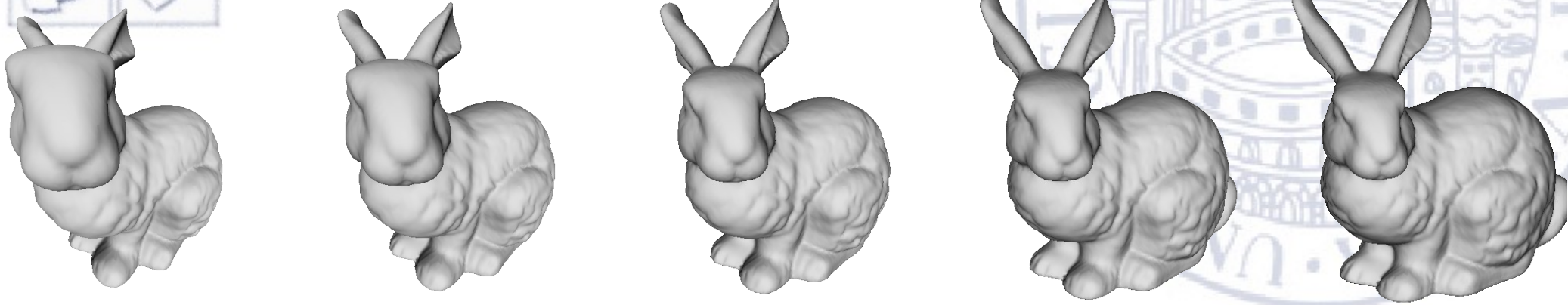
Proiezioni prospettiche

- Al variare della distanza focale (d)





Proiezioni prospettiche



d piccolo

d grande

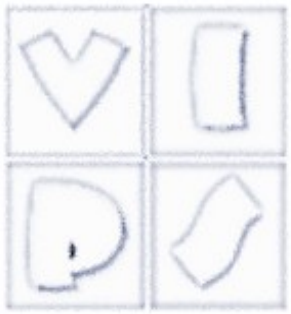
d infinito
(p. parallela)

Più distorsione prospettica

Effetto "*fish-eye*" (grandangolo)

Proporzioni più mantenute

Effetto "*zoom*" (es. vista dal satellite)



Proiezione parallela

- La proiezione ortogonale (od ortografica)è definita come l'interesezione del piano proiettivo con la retta perpendicolare a tale piano e passante per il punto P che si vuol proiettare
- E' un caso particolare di proiezione parallela
- La proiezione ortogonale di P si ottiene applicando la seguente matrice:

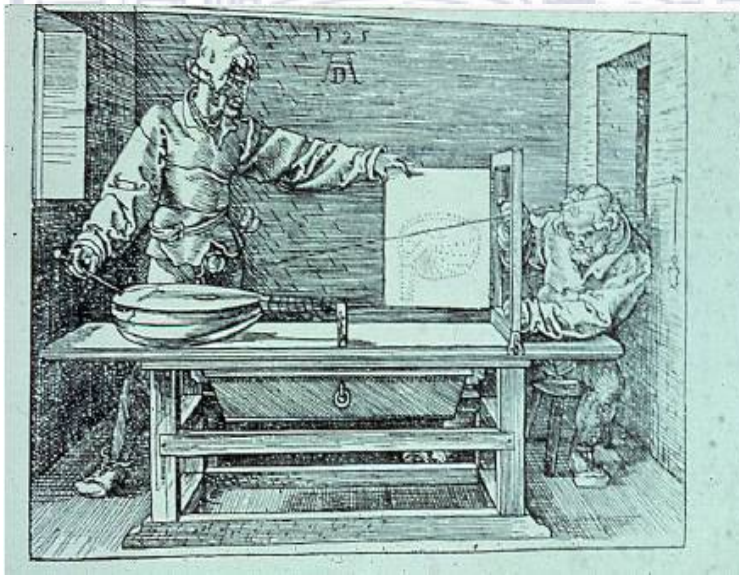
$$M_{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

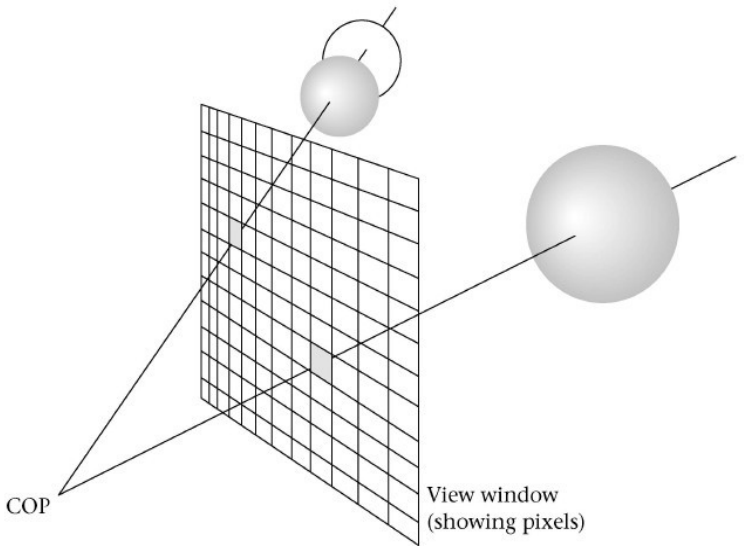
- In sostanza l'effetto della matrice è quello di rimuovere la componente z.

A.

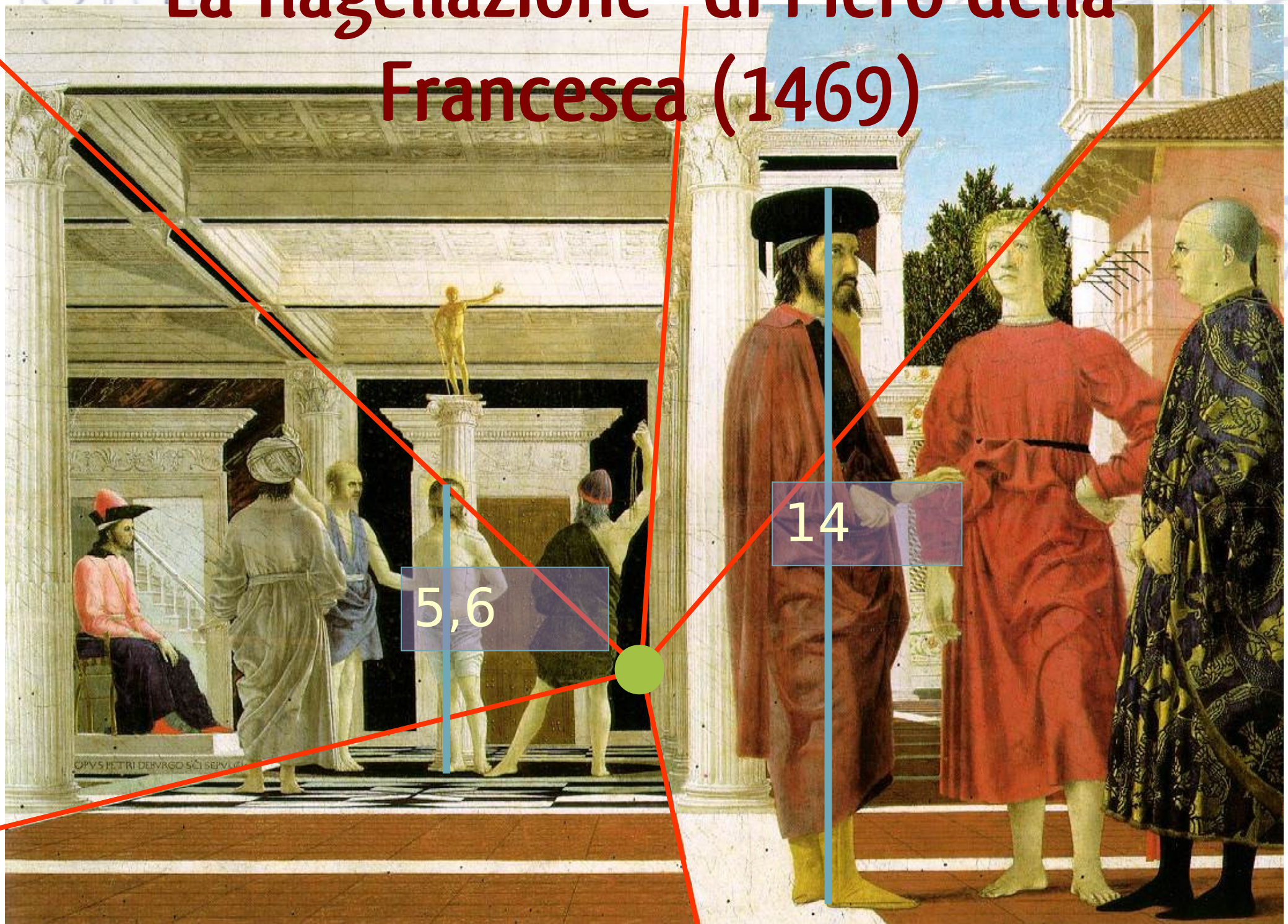
Algoritmo del pittore/ray casting

- Metodo di formazione dell'immagine intuitivo
- Si fissa un punto di vista o COP (occhio del pittore) ed un rettangolo (tela) su cui si formerà l'immagine (piano immagine).
- Il rettangolo stesso prende il nome di finestra di vista (view window).
- La tela è divisa in celle (pixel), ciascuna delle quali assumerà un colore.
- Si traccia un raggio (raggio ottico) attraverso ciascuna cella e la si dipinge con il colore che si vede lungo il raggio.





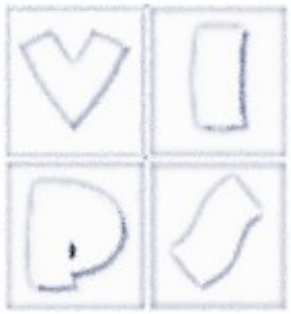
La flagellazione" di Piero della Francesca (1469)



Algoritmo del pittore/Ray casting

La distanza del piano immagine dal COP e le dimensioni della finestra di vista determinano l'angolo di vista.

- I raggi ottici riempiono una piramide semi-infinita con vertice nel COP e spigoli passanti per i vertici della finestra di vista.
- Questo processo prende il nome di **ray casting** e ricalca il modo in cui Aristotele pensava funzionasse la visione umana.
- Possiamo applicare il ray casting per calcolare le immagini virtuali a partire da tutte le descrizioni dei modelli viste.
- Semplice, ma inefficiente, per via del calcolo delle intersezioni
- Il cuore del processo sarà il calcolo del colore lungo i raggi.
  - Bisogna studiare un modello di illuminazione, che esprime i fattori che determinano il colore di una superficie in un determinato punto.

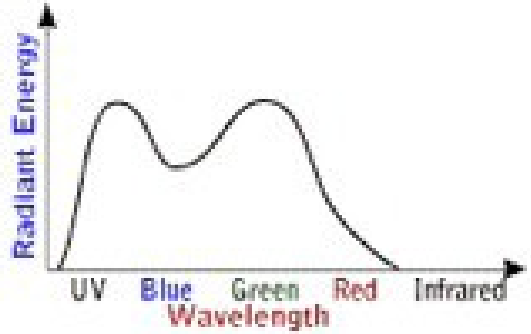


Radiometria

Fotometria/radiometria

La radiazione luminosa è caratterizzata da

- distribuzione spettrale, che ne determina il colore
- energia che ne determina l'intensità o luminosità
  - per ora usiamo in modo informale questi termini
- Si chiama fotometria la misura dell'energia trasportata dalle onde elettromagnetiche della gamma ottica (spettro visibile).
- la fotometria si occupa dell'azione della luce visibile sull'occhio umano
- La radiometria invece si occupa di radiazioni estese sull'intero intervallo delle possibili lunghezze d'onda e non considera gli effetti sull'osservatore.



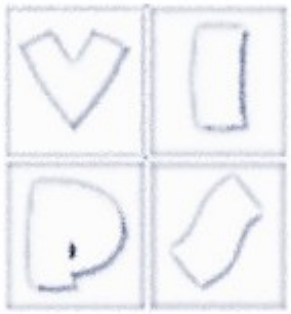
Radiometria

- Essendo interessati ad un modello oggettivo, definiremo le grandezza radiometriche (tra parentesi le corrispondenti denominazioni fotometriche).
- Assumendo che non ci sia interazione tra le diverse lunghezze d'onda, si può misurare l'energia indipendentemente per un certo numero di lunghezze d'onda campione che servono a rappresentare l'intera distribuzione spettrale.
- Di solito se ne usano 3, per motivi legati al sistema visivo umano, corrispondenti al rosso, verde e blu (RGB).
- Tutte le grandezze che definiremo sono implicitamente spettrali, ovvero riferite ad una singola lunghezza d'onda.

Radiometria

- Il flusso radiante (flusso luminoso) Φ è la velocità alla quale l'energia luminosa viene emessa – o assorbita – da una superficie, ha le dimensioni di una potenza (energia per unità di tempo) e si misura in Watt [W].
- Si dice irradianza (illuminanza) E(x) il rapporto tra il flusso ricevuto da un elemento infinitesimo di superficie in x e la sua area dx:

$$E(x) = d\Phi/dx$$



Radiometria

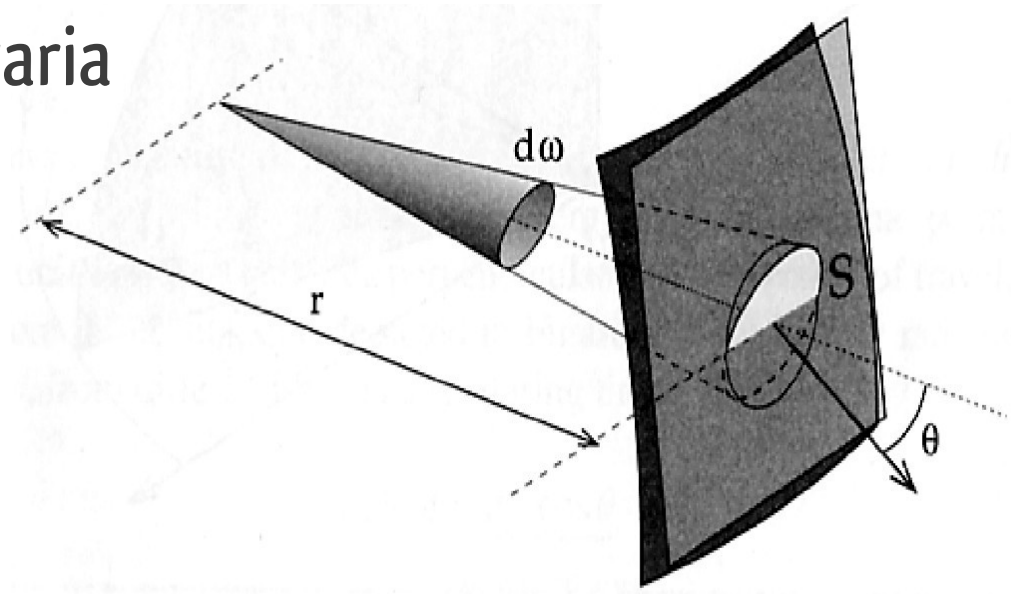
- Si dice radiosità (luminosità) o radiosity B(x) il rapporto tra il flusso emesso da un elemento infinitesimo di superficie in x e la sua area dx:

$$B(x) = d\Phi / dx$$

- Irradianza e radiosità sono la stessa grandezza (una densità superficiale di flusso) e si misurano in [W/m2]. La differenza è che l'irradianza è energia ricevuta, la radiosità è energia emessa.
- In entrambe i casi, l'energia ricevuta/emessa si considera da/verso tutte le direzioni.

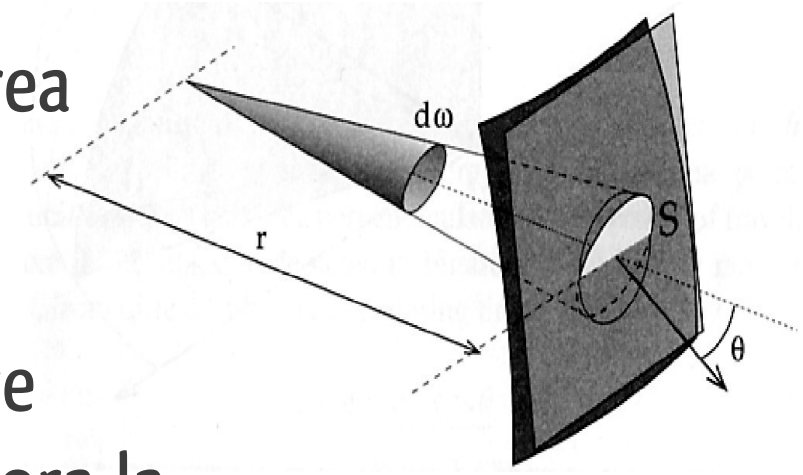
Radiometria

- L'intensità radiante (luminosa) è il flusso radiante (luminoso) emesso in un angolo solido infinitesimo $d\omega$ lungo una particolare direzione ω : $I(\omega) = d\Phi/d\omega$
- Si usa soprattutto per descrivere sorgenti luminose puntiformi.
- L'angolo solido sotteso da un oggetto rispetto un punto P è pari all'area della proiezione dell'oggetto su una sfera unitaria centrata in P.



Radiometria

- L'angolo solido sotteso da un elemento infinitesimo di superficie dx centrato in x ed orientatocon normale **n**, rispetto ad un punto y distante r vale: $d\omega = dx \cos\theta / r^2$ dove θ è l'angolo formato dalla normale n con la congiungente y ed x.
- il termine $dx \cos\theta$ rappresenta l'area proiettata di dx lungo la congiungente y ed x.
- Se poniamo in y una sorgente di luce puntiforme con intensità radiante I, allora la irradianza nel punto x vale:



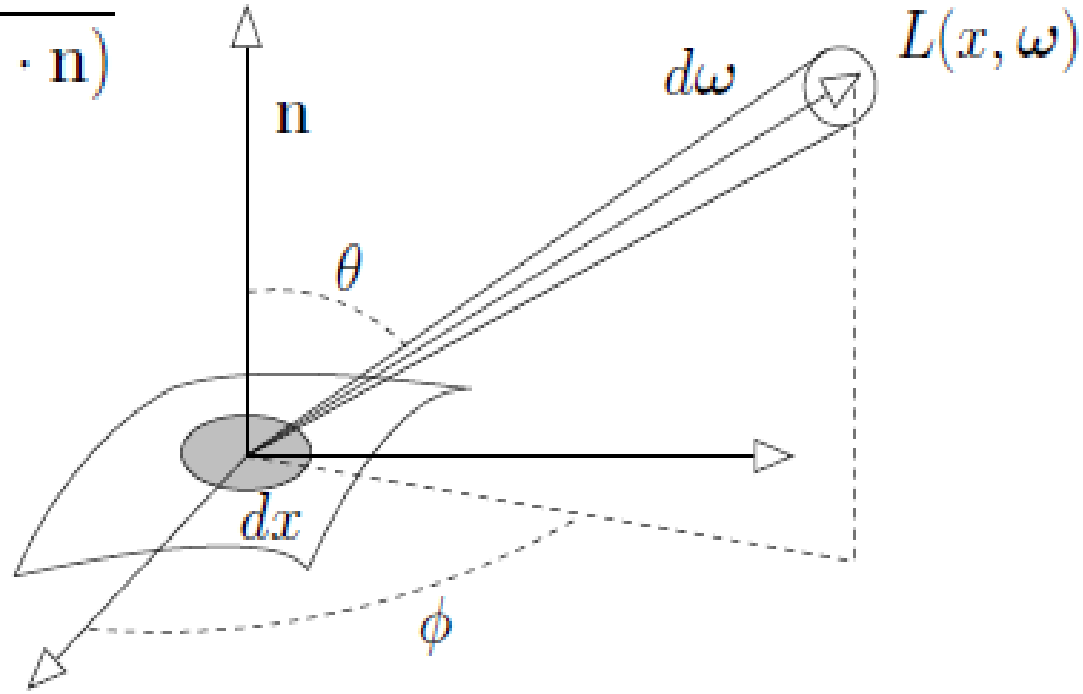
$$E(x) = \frac{d\Phi}{dx} = \frac{I\cos\theta}{r^2}$$

Radianza

- La radianza (luminanza) $L(\mathbf{x},\omega)$ nel punto $\mathbf{x}$ in una direzione θ è la densità superficiale della intensità radiante (luminosa) in x lungo la direzione θ, considerando l'area della superficie proiettata:

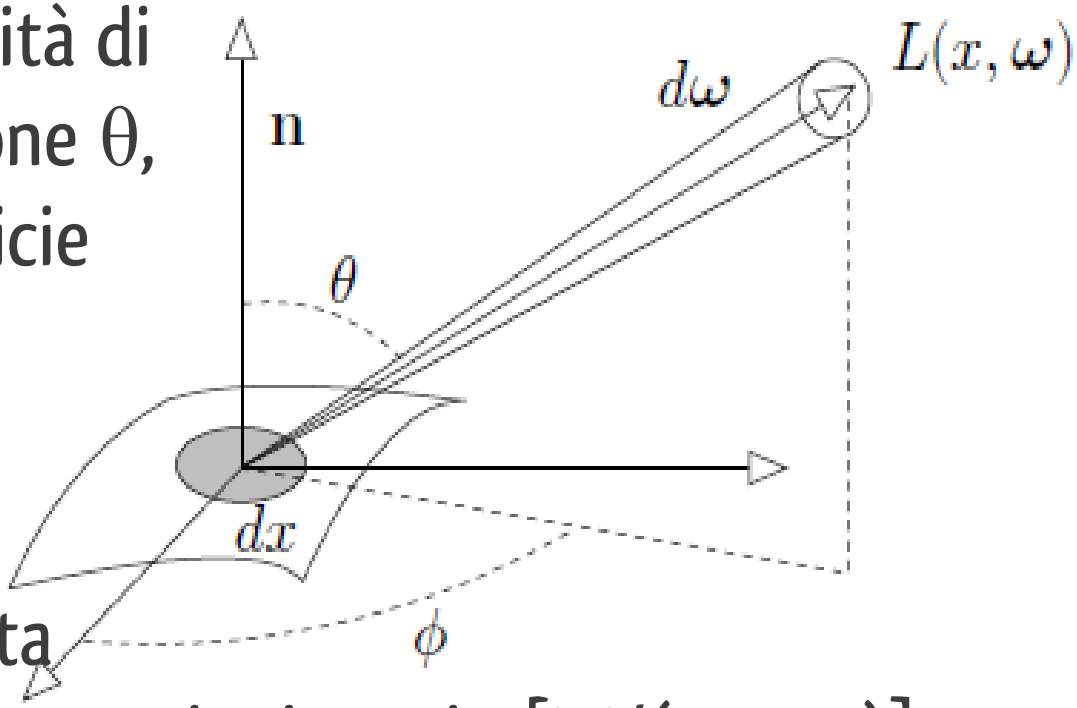
$$L(x,\omega) = \frac{dI(\omega)}{dx(\omega \cdot \mathbf{n})} = \frac{d^2\Phi}{d\omega dx(\omega \cdot \mathbf{n})}$$

- L'area proiettata della superficie infinitesima dx è l'area della proiezione di dx (la cui normale è $\mathbf{n}$) sul piano perpendicolare a ω, e vale dunque $dx(\omega \cdot \mathbf{n})$



Radianza

- La direzione ω è data da due angoli: l'elevazione θ (rispetto alla normale alla superficie n) e l'azimuth φ(rispetto ad una direzione fissata sulla superficie.)
- Possiamo dunque scrivere: $(\omega \cdot \mathbf{n}) = \cos\theta$
- La radianza $L(x,\omega)$ è la densità di flusso nel punto x in una direzione θ, misurata rispetto ad una superficie infinitesima perpendicolare a θ.
- La radianza è pari al il flusso radiante per unità di angolo solido per unità di area proiettata lungo la direzione di propagazione, e si misura in [W/(m2· st)].



Radianza lungo un raggio

- Dati due punti x e y (nel vuoto) la radianza che lascia x verso y è uguale a quella che raggiunge y dalla direzione di x: non si attenua con la distanza.
- Il modello che si usa in Grafica è quello di raggi luminosi che trasportano una certa quantità di energia luminosa.
- Nel ray casting, dunque, i raggi luminosi trasportano radianza, ed i pixel registrano il valore della radianza (idealmente)
- Quando – informalmente – si parla di "intensità" del pixel, si fa riferimento alla radianza.
- In realtà non è possibile rappresentare linearmente la radianza nell'intervallo [0,255] senza perdita di informazione, poiché quest'ultima ha una gamma dinamica più elevata.
- Nelle tipiche immagini, quindi, il valore di "intensità" del pixel è legato al logaritmo della radianza.

Radiosità

- Sia Ω la semisfera delle direzioni attorno alla normale in x. Dall'equazione scritta prima si ha:

$$L(x,\omega)(\omega \cdot \mathbf{n}) = \frac{d^2\Phi}{d\omega dx}$$

ed integrando:

$$\int_\Omega L(x,\omega)(\omega \cdot \mathbf{n})d\omega = \int_\Omega \frac{d^2\Phi}{d\omega dx}d\omega = \frac{d\Phi}{dx} = B(x)$$

- Similmente, per l'energia incidente, l'irradianza vale:

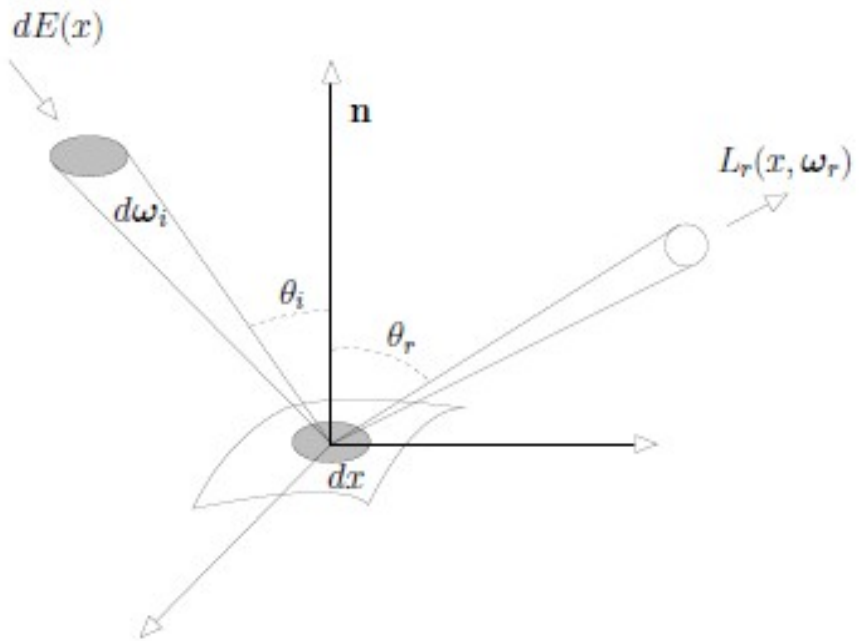
$$E(x) = \int_\Omega L(x,\omega)(\omega \cdot \mathbf{n})d\omega$$

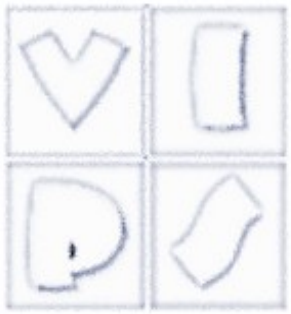
  - Nota: la radianza è definita per unità di area proiettata, mentre la irradianza/radiosità sono definite per unità di area (effettiva).

BRDF

Introduciamo la Bidirectional Reflectance Distribution Function (BRDF) che caratterizza il materiale di cui è composta la superficie

- La BRDF $\rho(x,\omega_i,\omega_r)$, è il rapporto tra la radianza riflessa da x lungo la direzione ω_r e l'irradianza della luce incidente nel punto x da un angolo solido infinitesimale $d\omega_i$ centrato in ω_i:





BRDF

Si usa la irradianza e non la radianza per misurare la densità di flusso incidente perché quest'ultima non tiene conto della reale orientazione della superficie

Si vede facilmente che l'irradianza è legata alla radianza della luce incidente $L_i(\mathbf{x},\omega_i)$ da:

$$dE(x) = L_i(\mathbf{x},\omega_i)(\omega_i \cdot \mathbf{n})d\omega_i$$

dove $(\omega_i \cdot \mathbf{n}) = \cos\Theta_i$

Dunque la BRDF si scrive:

$$\rho(x, \omega_i, \omega_r) = \frac{L_r(x, \omega_r)}{L_i(x, \omega_i)(\omega_i \cdot \mathbf{n})d\omega_i}$$

BRDF

- Siccome la radianza è definita per unità di area proiettata, moltiplicando per $(\omega_i \cdot \mathbf{n})$ la si converte in una misura per unità di area (non proiettata).
- In altri termini, si tiene conto del fatto che la radianza è misurata rispetto ad un'area infinitesima orientata diversamente da quella che in effetti viene illuminata, mentre noi vogliamo esprimere l'effettivo flusso incidente.
- Se consideriamo i contributi di irradianza da tutte le direzioni di incidenza -, la radianza totale riflessa nella direzione ω_r, è vale:

$$L_r(x, \omega_r) = \int_{\omega_i \in \Omega} \rho(x, \omega_i, \omega_r) L_i(x, \omega_i)(\omega_i \cdot \mathbf{n}) d\omega_i$$

Diffusione pura

- Una superficie Lambertiana (o diffusore perfetto) ha una BRDF costante: $\rho(\mathbf{x},\omega_i,\omega_r) = \rho(\mathbf{x})$. La radianza (riflessa) di tale superficie non dipende dalla direzione.

$$L_r(x,\omega_r) = \rho(x)\int_\Omega L_i(x,\omega_i)(\omega_i\cdot\mathbf{n})d\omega_i = \rho(x)E(x) = L(x)$$

- Inoltre

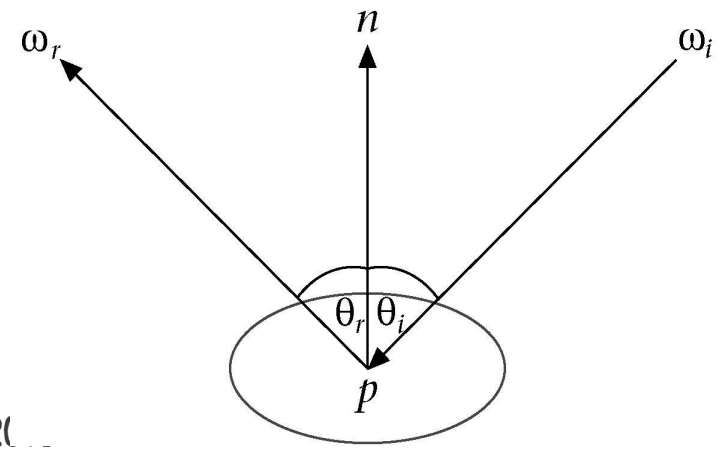
$$B(x) = \int_\Omega L(x,\omega)(\omega\cdot\mathbf{n})d\omega = L(x)\int_\Omega \cos\theta d\omega = \rho(x)E(x)\pi$$

- $\rho_d(\mathbf{x})=\pi\rho(\mathbf{x})$ prende il nome di albedo.
  - L'albedo è la frazione di irradianza $\mathrm{E}(\mathbf{x})$ che viene riflessa come radiosità $\mathrm{B}(\mathbf{x})$. Il resto dell'energia viene assorbito
  - Un diffusore perfetto è una superficie ruvida (come il gesso o il coccio) che ripartisce la radianza del raggio entrante uniformemente su tutte le direzioni lungo una semisfera

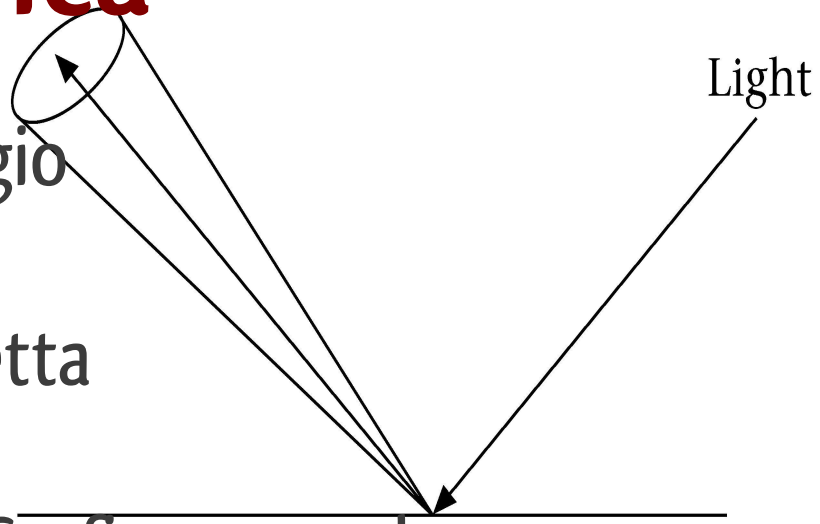
BRDF generica

La specifica esatta della BRDF per superfici reali è estramemente difficile da ottenere.

- Nella grafica al calcolatore si usano approssimazioni della BRDF. Le due più semplici e più usate modellano due comportamenti ideali dei materiali: una è appunto la diffusione, l'altra è la riflessione speculare
- Un riflettore speculare si comporta come uno specchio perfetto, che riflette il raggio incidente lungo una direzione che forma con la normale lo stesso angolo formato dalla direzione di incidenza.



BRDF generica



- In un materiale lucido (glossy) il raggio incidente viene disperso in un cono attorno alla direzione di riflessione perfetta

- Tipicamente le BRDF che si usano in Grafica mescolano diffusione e riflessione speculare
- Abbiamo omesso la dipendenza dalla lunghezza d'onda, ma la BRDF, in generale, dipende anche da essa: le superfici appaiono colorate per questo: la luce bianca (spettro uniforme) incide sulla superficie e grazie all'assorbimento selettivo delle componenti cromatiche la luce riflessa ha una distribuzione spettrale non uniforme, ovvero è "colorata"

Equazione del rendering

- La radianza riflessa in direzione ω_r, dovuta all'irradianza lungo una direzione ω_i è $L_r(x, \omega_r) = \rho(x, \omega_i, \omega_r) L_i(x, \omega_i)(\omega_i \cdot \mathrm{n})$
- La radianza totale riflessa lungo ω_r, è la somma dei contributi dovuti a tutte le possibili direzioni incidenti, Θ, quindi vale:

$$L_r(x, \omega_r) = \int_\Omega \rho(x, \omega_i, \omega_r) L_i(x, \omega_i)(\omega_i \cdot \mathrm{n}) d\omega_i$$

- Aggiungendo la radianza emessa $L_e(x,\omega)$ si ottiene l' **equazione del rendering, o della radianza** (Kaijya, 1987), che esprime la radianza totale che lascia il punto x nella direzione ω:

$$L(x, \omega) = L_e(x, \omega) + \int_\Omega \rho(x, \omega_i, \omega) L(x, \omega_i)(\omega_i \cdot \mathrm{n}) d\omega_i$$

- La radianza incidente in x lungo la direzione ω_i, $L_i(\mathbf{x},\omega_i)$ è uguale alla radianza emessa da un altro punto y nella direzione sotto cui y vede x: $L_i(\mathbf{x},\omega_{xy})=L_i(\mathbf{x},\omega_{yx})$ con $\omega_i = \omega_{xy}$
- L'angolo solido infinitesimo $d\omega$ sotto cui y vede dx vale:

$$d\omega = dy \cos\theta_{yx} / ||x-y||^2$$

- Introduciamo il termine di visibilità $V(x,y)$ che vale 1 sse x è visibile da y. Possiamo quindi trasformare l'equazione del rendering da integrale su una semisfera di direzioni ad integrale su tutte le superfici S della scena:

$$L(x,\boldsymbol{\omega}) = L_e(x,\boldsymbol{\omega}) + \int_{y\in S} \rho(x,\boldsymbol{\omega}_{xy},\boldsymbol{\omega}) L(y,\boldsymbol{\omega}_{yx}) G(x,y) dy$$

- Il termine $G(x,y) = \frac{\cos\theta_{xy}\cos\theta_{yx}}{||x-y||^2} V(x,y)$ dipende solo dalla geometria della scena.

Equazione del rendering

$$L(x,\omega) = L_e(x,\omega) + \int_\Omega \rho(x,\omega_i,\omega) L(x,\omega_i)(\omega_i \cdot \mathrm{n}) d\omega_i$$

- Per determinare il colore del pixel nel ray casting dobbiamo risolverla
- Ricorsiva: L a sinistra e anche a destra..
  - La radianza in un punto di una superficie è determinata globalmente, poiché dipende non solo dalle sorgenti luminose (primarie) ma anche da tutte le altre superfici presenti nell'ambiente (sorgenti secondarie): assai oneroso!
- La disciplina della grafica al calcolatore è incentrata sulla soluzione di questa equazione.
- Si propongono soluzioni approssimate, in modo più o meno grossolano
  - Si semplificano sia la BRDF che la ricorsione.

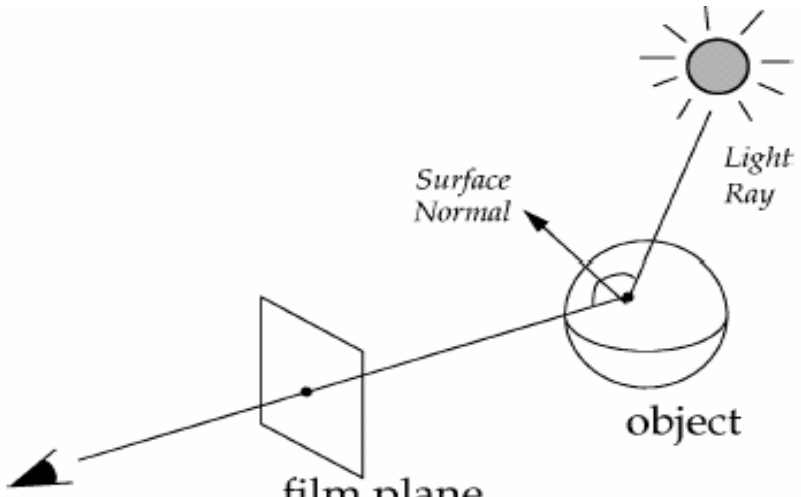
Ricorsione

Per quanto riguarda questo aspetto, i metodi si dividono in **locali** e **globali**.

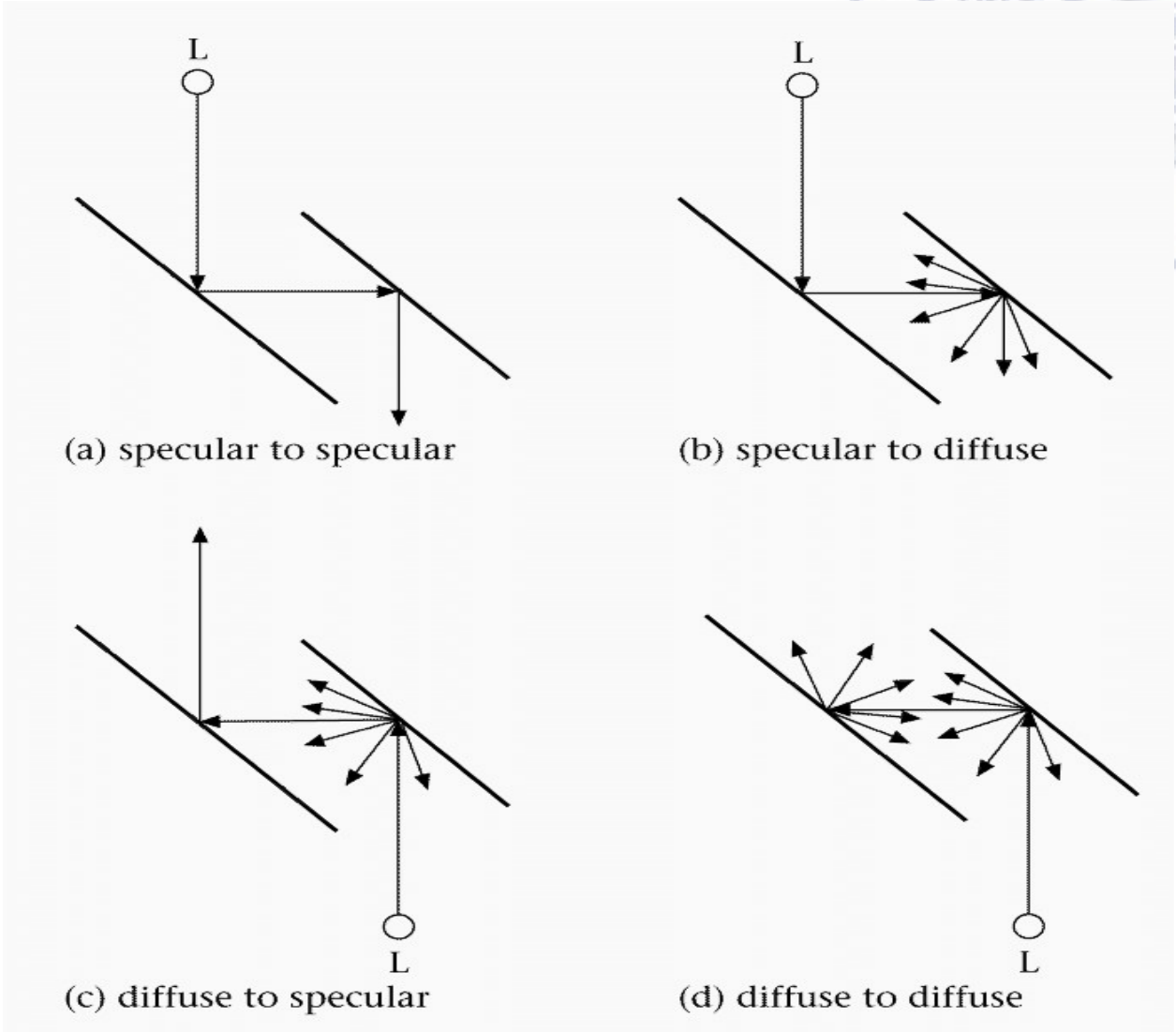
- Locali. Si elimina la ricorsione, tenendo conto solo dell'effetto diretto delle sorgenti luminose, trascurando le interriflessioni
  - nell'equazione viene considerata la radianza entrante solo lungo le direzioni corrispondenti a raggi provenienti direttamente dalle sorgenti luminose, la cui radianza è nota (ray casting semplice)
- Globali. Si tiene conto della natura ricorsiva della equazione della radianza, ma si trascurano alcuni fenomeni di interriflessione per rendere il problema trattabile. Esempi:
  - ray tracing, corretto solo per le riflessioni speculari
  - radiosity che modella solo le interriflessioni tra superfici diffusive.

Gli algoritmi che vedremo

- Ray tracing estende ricorsivamente il paradigma del ray casting per determinare il percorso dei soli raggi riflessi specularmente e rifratti. Gli altri contributi alla radianza sono calcolati con metodi locali.
- Radiosity riformula l'equazione della radianza in termini di radiosità, perdendo dunque la direzionalità. Per questo è corretta solo se la scena è composta da diffusori perfetti.

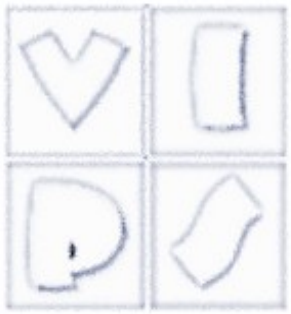


Effetti modellati dagli algoritmi



Modelli di illuminazione

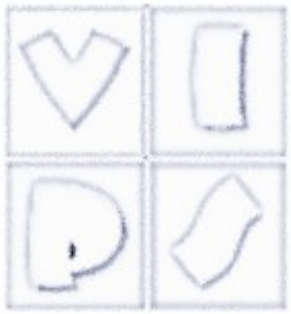
- Anche per gli algoritmi locali, vedremo come applicare modelli di illuminazione misti che considerino sia componenti diffusive che speculari (e magari simulino l'effetto dell'illuminazione globale
  - Ad essi può corrispondere una relativa BRDF
- Nota: possiamo semplificare ancora di più: porre $\rho(\mathbf{x}) = 0$. In questo modo l'integrale si azzera e si ha $L(x,\omega) = L_e(x,\omega)$
  - Ogni punto ha una radianza (colore) preassegnata (color texture).
  - In rasterizzazione useremo tecniche per colorare con texture gli oggetti



Dipendenza dalla vista

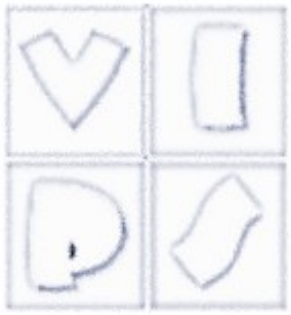
Con ray tracing e radiosity si vede un'altra dicotomia, tra soluzioni view-dependent e view-independent.

- Il ray tracing è view-dependent in quanto la soluzione che trova dipende dalla posizione dell'osservatore.
- La soluzione di radiosity, invece, viene calcolata in relazione alle superfici della scena e non dipende dalla posizione dell'osservatore.



Domande di verifica

- Che cos'è la radianza?
- Che cosa si intende per BRDF?
- Cosa si intende per soluzione globale/locale dell'equazione del rendering?
- Cosa si intende per “modello di illuminazione”?



Riferimenti

- Scateni et al. Cap 6/8