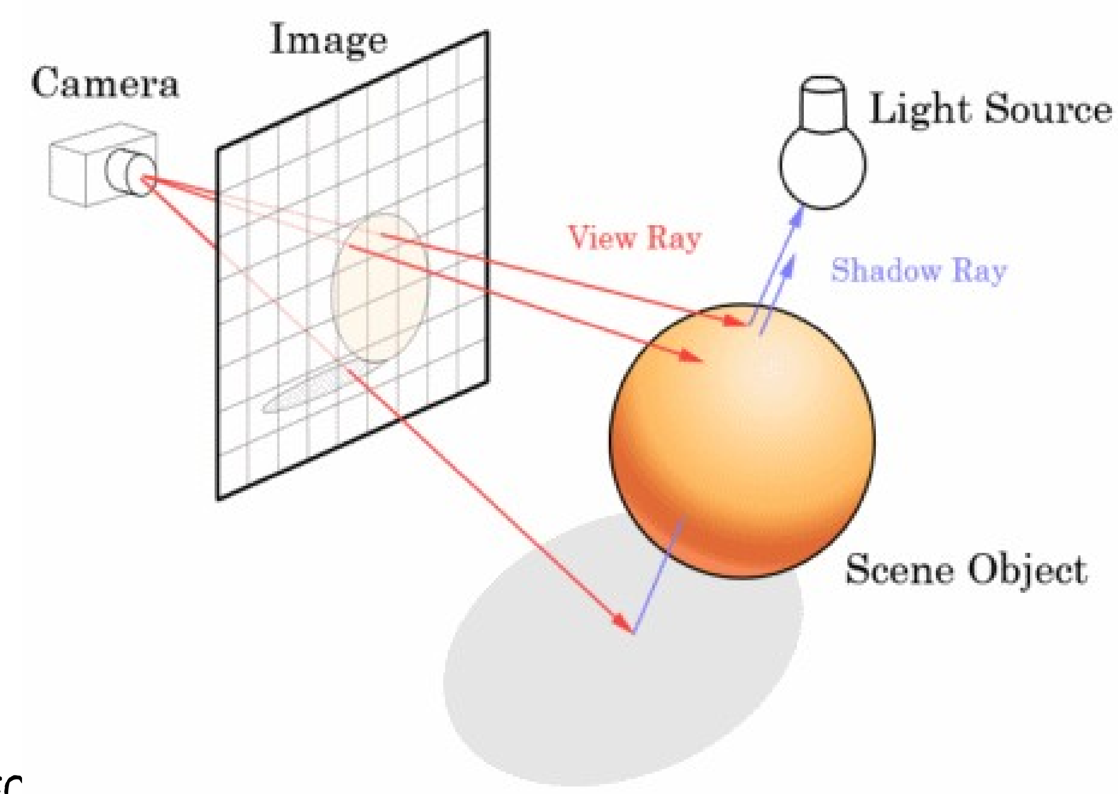
Fondamenti di Grafica al calcolatore

2- Geometria dello spazio

andrea.giachetti@univr.it

Grafica 3D

- Ingredienti
  - Modello scena 3D (primitive che descrivono l'oggetto)
  - Modello telecamera
  - Fisica interazione luce-materia

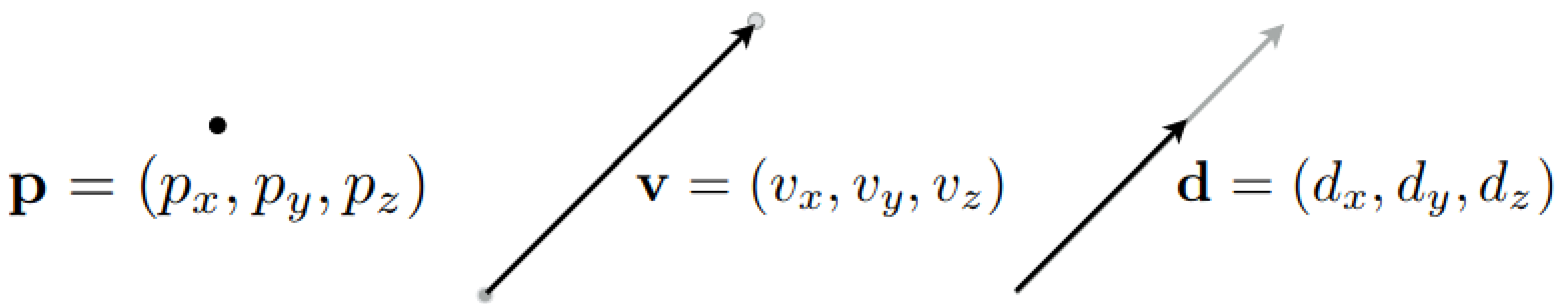


Modellare le scene

- Vogliamo modellare le scene in 3D
- Occorre rappresentare gli oggetti
- Dove? Nello spazio Euclideo
- Ci serve la geometria
- Nei calcoli si usano i concetti dell'algebra lineare
- Rappresentiamo punti e vettori in distemi di riferimento cartesiani e basi ortonormali, con terne di numeri reali

Geometria

- Punti: posizioni nello spazio
- Vettori: differenze tra punti, spostamenti
- Direzioni: vettori unitari
  - Dovremmo ricordare che per i vettori nello spazio Euclideo è definita la metrica data dal prodotto scalare (lunghezza vettori)



Operazioni

- Sono definite somme tra vettori e moltiplicazione di vettore per scalare

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_x+v_x\\u_x+v_y\\u_z+v_z\end{bmatrix} \qquad s\mathbf{v}=\begin{bmatrix}sv_x\\sv_y\\sv_z\end{bmatrix}$$

- Il prodotto scalare calcola la proiezione di un vettore sulla retta di un altro

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

- E definisce la metrica: lunghezza vettore $l=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$
- Se il prodotto interno di due vettori e nullo, diremo che i due vettori sono ortogonali.

Operazioni

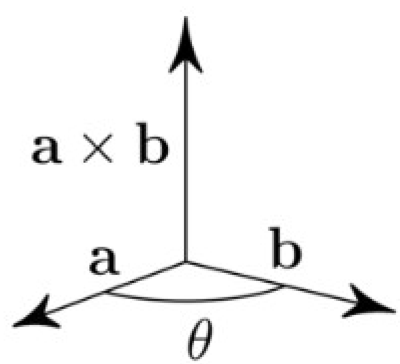
- E' poi definito il prodotto esterno o prodotto vettore che fornisce un vettore ortogonale ai primi due
- Utile per calcolare le normali
- Utile per calcolare terne ortogonali a partire da un vettore
- Il verso è scelto in modo tale che ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{v}$) formino una terna destrorsa

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

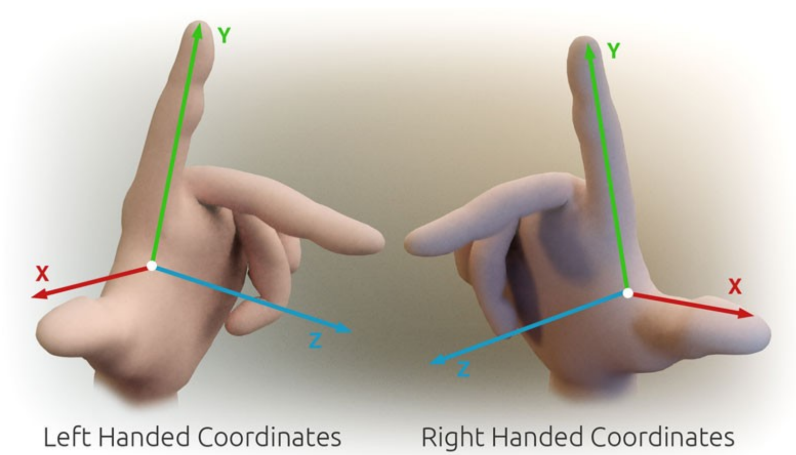


Combinazioni affini

- Non è definita una somma tra punti e neppure un prodotto di uno scalare per un punto; in generale sono operazioni non lecite, ma c'è una eccezione
- Si prendano tre punti $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ ed $\boldsymbol{o}$ e si consideri il seguente punto $$\boldsymbol{p}' = \alpha(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{o}) + \beta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{o}) + \boldsymbol{o}$$
- $\boldsymbol{p}'$ non dipende da $\boldsymbol{o}$, ma solo dai punti $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$, se e solo se $$\alpha + \beta = 1$$
- In questo caso $\boldsymbol{p}'$ è la combinazione affine di $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$, e si scrive, a volte in modo improprio, come somma pesata dei punti
- La combinazione affine di due punti distinti descrive la retta passante per i due punti.

Vettori e basi

- Usiamo tre vettori unitari ortonormali e_1, e_2, e_3 come base per esprimere in modo univoco i vettori come terne date dalle proiezioni del vettore sui tre elementi di base
- Nota: esistono terne destrorse e sinistrorse: una base ortonormale si dice destrorsa, se la rotazione attorno ad e_3 che porta e_1 a coincidere con e_2 è antioraria se vista dalla parte positiva di e_3 .



Sistemi di riferimento (frame)

- Il concetto di base si estende a quello di riferimento in uno spazio affine (o Euclideo) specificando, oltre alla base, anche un punto O detto origine del riferimento.
- Poiché ogni vettore è sviluppabile in una base data ed ogni punto esprimibile come somma di un punto dato e di un vettore, dato un riferimento $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, O)$, i punti ed i vettori dello spazio saranno esprimibili nel seguente modo:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

$$P = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3 + O$$

- Un riferimento **cartesiano** è dato da un riferimento la cui base di vettori sia ortonormale
- Un riferimento è destrorso se lo è la sua base.

Coordinate omogenee

- Una notazione utile per punti è vettori rispetto al riferimento (e_1, e_2, e_3, O) è data dalle **coordinate omogenee**

$$\boldsymbol{v}=(v_{1,}v_2,v_3,0)$$
$$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3,1)$$

- Per le coordinate omogenee di punti in realtà si considera la classe di equivalenza. Per λ diverso da zero

$$\boldsymbol{p}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z,\lambda w)$$

- Rappresenta lo stesso punto qualunque λ
- Le coordinate ordinarie del punto sono $(x/w, y/w, z/w)$
- Posso rappresentare i punti in coordinate omogenee normalizzate dividendo per la quarta componente (e rendendola 1)

Matrici e trasformazioni

- Una matrice è essenzialmente un array bidimensionale di elementi; per i nostri scopi gli elementi saranno sempre degli scalari, tipicamente numeri reali.
- Una matrice A con M righe ed N colonne si scrive nel seguente modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

- Una matrice in cui N = M si dice quadrata
- Il caso limite in cui M = 1 coincide con la rappresentazione algebrica di un vettore (o con la N-pla delle sue componenti)

- Una matrice A puo essere moltiplicata per uno scalare β ottenendo una matrice C = βA definita nel seguente modo:

$$c_{ij} = \beta a_{ij} \quad \forall i, j$$

- Due matrici A e B si possono sommare se e solo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne; in tal caso si ha C = A + B data da $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

- Il prodotto tra matrici e definito solo quando il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda. Se A e una matrice NxM e B e una matrice MxK, allora si ha C = AB (di dimensioni NxK) data da:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{M} a_{il} b_{lj}$$

Il prodotto tra matrici è associativo ((AB)C = A(BC)), ma non commutativo (in generale AB≠BA)

Matrice trasposta

- indicata con il simbolo A^T, è la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A

$$a^T_{ij} = a_{ji}$$

- Quindi se A è NxM, allora la sua trasposta è MxN.
- Per i vettori trasporre equivale a trasformare un vettore riga in un vettore colonna e viceversa
- D'ora in poi quando parleremo di trasformazione di un vettore **v** con una matrice A intenderemo sempre l'usuale prodotto di matrici tra A e il trasposto di **v** inteso come matrice con una sola colonna, es.

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$$

Determinante

- Importante parametro per le matrici quadrate, indicato con il simbolo $\det A$ o con il simbolo $|A|$. Si definisce ricorsivamente:
- il determinante di una matrice 2x2 è definito da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- il determinante di una matrice NxN e dato dalla formula

$$\det A = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+k} a_{jk} det A_{jk}$$

- dove k e una colonna qualsiasi di A e dove il simbolo A_{jk} indica la matrice (N-1)x(N-1) ottenuta da A eliminando la riga j e la colonna k. Si può dimostrare che det(AB) = detA detB

Matrici come trasformazioni

Abbiamo visto cosa significa applicare una matrice ad un vettore, cioè moltiplicare righe per vettore colonna e ottenere un vettore

- Le matrici quadrate rappresentano quindi delle applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sé (formano un gruppo non abeliano)
- Tutte le applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sé sono esprimibili tramite matrici quadrate
- L'applicazione di più di una matrice ad un vettore si effettua sfruttando l'algebra delle matrici; ad esempio applicare prima A, poi B ed infine C equivale ad applicare la matrice CBA
- Con le matrici 3x3 possiamo scrivere le rotazioni dei vettori
- Con le matrici 4x4 possiamo scrivere le **trasformazioni di punti e vettori in coordinate omogenee**.

Matrice rotazione 3x3

- Una matrice 3x3 moltiplicata per un vettore lo ruota
- Es: rotazione rispetto ad asse z

$$R=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotazione che porta un vettore unitario **e** nel vettore unitario **e'**

$$R=\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1{}'\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_3\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_3\boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$$

Matrici come cambiamento di base

- Abbiamo detto che dato uno spazio vettoriale esistono infinite basi. Nella rappresentazione concreta il cambiamento da una base ad un'altra è descritto da una matrice
- In generale dato un vettore (v_1, v_2, v_3), la sua trasformazione in (v'_1, v'_2, v'_3) tramite la matrice M puo essere vista o come una trasformazione identificata da M del vettore fissata la base, oppure come un cambiamento di base indotto dalla matrice M^{-1} tenendo fisso il vettore
- Nel primo caso si parla di **trasformazione attiva** sullo spazio, nel secondo caso di **trasformazione passiva**

Esercizio/esempio

- Qual è la rotazione che porta gli assi canonici $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ in una qualunque terna $\boldsymbol{e'}_1=(e'_{11},e'_{12},e'_{13})$, $\boldsymbol{e'}_2=(e'_{21},e'_{22},e'_{23})$, $\boldsymbol{e'}_3=(e'_{31},e'_{32},e'_{33})$
- La matrice di rotazione è data da $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_2 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}'_2 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}'_2 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}'_3 \end{pmatrix}$
- Quindi $\begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{21} & e'_{31} \\ e'_{12} & e'_{22} & e'_{32} \\ e'_{13} & e'_{23} & e'_{33} \end{pmatrix}$
- Verificare

Cambio di riferimento

- L'idea si ripropone negli stessi termini per i sistemi di riferimento
- Dati due riferimenti (e_1, e_2, e_3, O) e (e'_1, e'_2, e'_3, O) si tratta di trovare una matrice 4x4 che permetta di ottenere le coordinate di un punto rispetto al secondo riferimento date le coordinate dello stesso punto rispetto al primo
- Come nel caso dei cambiamenti di base di un riferimento, se T è la trasformazione attiva che manda il primo riferimento nel secondo (e che manda le coordinate rispetto al secondo nelle coordinate rispetto al primo), allora T^{-1} e la matrice che trasforma le coordinate rispetto al primo riferimento nelle coordinate rispetto al secondo riferimento

Quindi

- La trasformazione che porta il sistema di riferimento canonico (0, $\boldsymbol{e}_1$=(1,0,0), $\boldsymbol{e}_2$=(0,1,0), $\boldsymbol{e}_3$=(0,0,1)) in un sistema arbitrario (O', $\boldsymbol{e'}_1$, $\boldsymbol{e'}_2$, $\boldsymbol{e'}_3$) sarà
$$\begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{21} & e'_{31} & O'_1 \\ e'_{12} & e'_{22} & e'_{32} & O'_2 \\ e'_{13} & e'_{23} & e'_{33} & O'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Allo stesso modo questa matrice trasforma le coordinate nel sistema di riferimento (O', $\boldsymbol{e'}_1$, $\boldsymbol{e'}_2$, $\boldsymbol{e'}_3$) in quelle nel sistema *(0,* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$*)* e con rotazione e traslazione inversa calcolo le coordinate rispetto al nuovo sistema date quelle in *(0,* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$). Per le matrici rotazione $R^{-1}=R^T$

Trasformazione punti in coordinate omogenee

- Un risultato comodo dell'usare le coordinate omogenee e le matrici di trasformazione è che possiamo usare il prodotto di matrici per
  - Trasformare punti e vettori con lo stesso formalismo
  - Applicare traslazioni rotazioni e scalature con lo stesso formalismo

- vector + vector = vector $$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$
- point + vector = point $$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + v_x \\ p_y + v_y \\ p_z + v_z \\ 1 \end{pmatrix}$$
- point - point = vector $$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - r_x \\ p_y - r_y \\ p_z - r_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Traslazione

- Una traslazione determinata dal vettore t trasforma il punto P nel punto

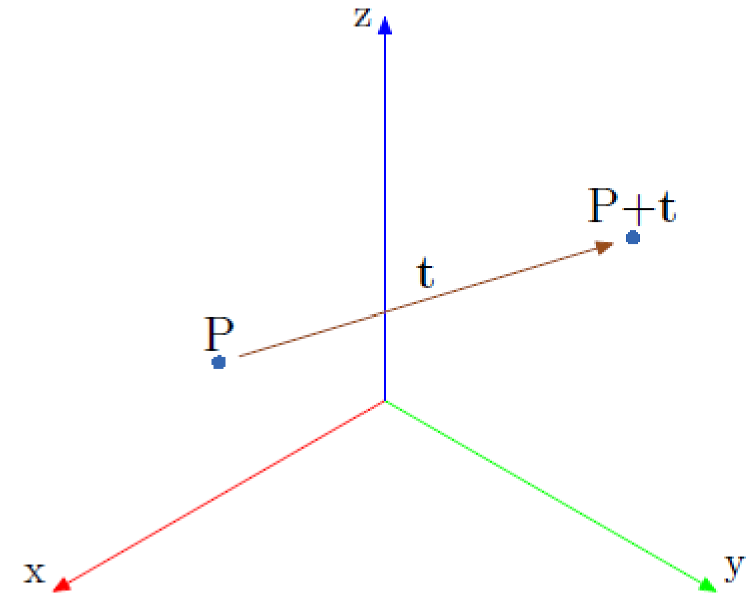
$$P' = P + \mathbf{t}$$

In termini di componenti

$$\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z, 0)$$

$$P = (p_x, p_y, p_z, 1)$$

$$P' = (p_x + t_x, p_y + t_y, p_z + t_z, 1)$$



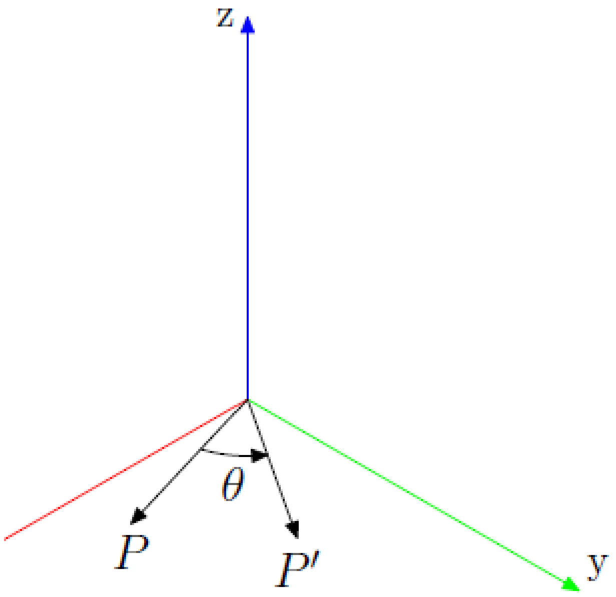
- E' facile vedere che la matrice di trasformazione T_t per le coordinate omogenee è quella qui a destra

$$T_{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazione rispetto a un asse

- Una rotazione di un angolo θ in senso antiorario (prima regola della mano destra) intorno all'asse z determina la seguente trasformazione di un punto P in P'

$$
\begin{aligned}
p'_x &= p_x \cos(\theta) - p_y \sin(\theta) \\
p'_y &= p_x \sin(\theta) + p_y \cos(\theta) \\
p'_z &= p_z
\end{aligned}
$$



- Si può facilmente dimostrare che per rotazioni intorno all'asse x e y si hanno le seguenti espressioni:'

$$
\begin{aligned}
p'_y &= p_y \cos(\theta) - p_z \sin(\theta) \\
p'_z &= p_y \sin(\theta) + p_z \cos(\theta) \\
p'_x &= p_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p'_z &= p_z \cos(\theta) - p_x \sin(\theta) \\
p'_x &= p_z \sin(\theta) + p_x \cos(\theta) \\
p'_y &= p_y
\end{aligned}
$$

Rotazioni

- Dovrebbe a questo punto essere facile dimostrare che le matrici che rappresentano le rotazioni rispetto agli assi coordinati sono quelle qui riportate
- Da notare che un vettore viene trasformato da una rotazione (a differenza delle traslazioni che lasciano i vettori inalterati)
- Le matrici non commutano

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

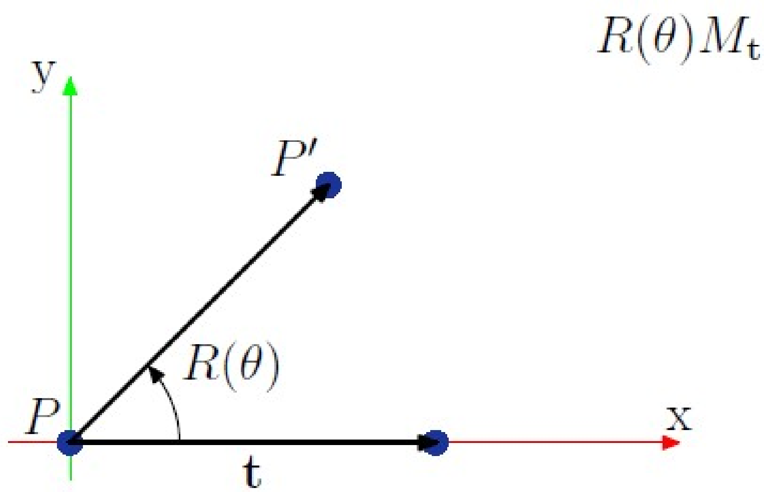
$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

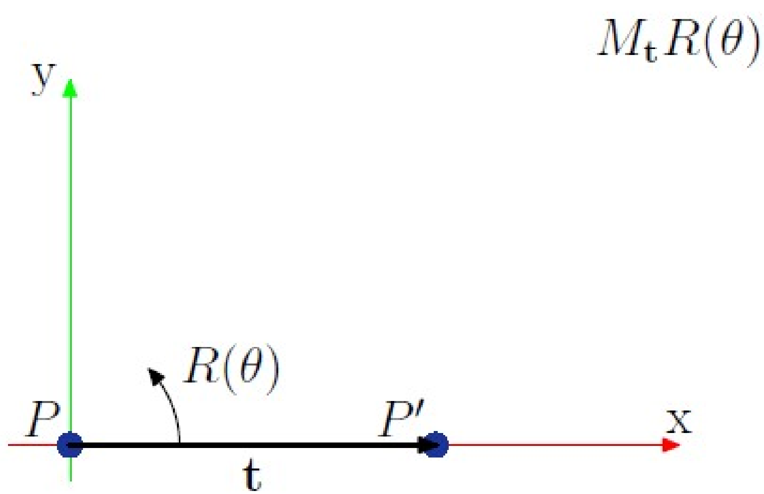
- Le rotazioni rispetto agli assi cartesiani non commutano; provare a ruotare un oggetto di 90 gradi prima rispetto all'asse x e poi rispetto all'asse y. Ripetete quindi l'operazione prima rispetto all'asse y e poi rispetto all'asse x. Risultato?
- Da notare che le rotazioni lasciano inalterati i punti che si trovano sull'asse di rotazione.
- Si può dimostrare che $R_x(\theta)^{-1} = R_x(-\theta)$ e similmente per gli altri assi
- Si può dimostrare che le matrici di rotazione date sopra sono ortogonali, cioè ad es per asse x: $R_x(\theta)^{-1} = R_x(-\theta)^T$
- La proprietà di ortogonalità è vera per ogni rotazione, non solo per quelle rispetto agli assi coordinati
- Tutte le rotazioni sono esprimibili con matrici.

Composizione di trasformazioni e matrici

- Le trasformazioni espresse come matrici si compongono usando semplicemente l'algebra delle matrici
- Date due trasformazioni rappresentate dalle matrici A e B, la composizione di A seguita da B sarà data dalla matrice BA.
  - Importante: notare l'ordine delle matrici; siccome si applica la matrice risultante a sinistra del vettore delle coordinate omogenee, la trasformazione che viene effettuata per prima va a destra.
- La composizione di trasformazione si estende immediatamente al caso di piu di due matrici $T = T_n \dots T_1$

Non commutatività





- Esempio: data una traslazione lungo il vettore **t** ed una rotazione di un angolo lungo l'asse **z**, si ottiene un risultato diverso effettuando prima la rotazione e poi la traslazione o viceversa
- Per rendersene conto basta guardare come viene trasformato nei due casi un punto che in partenza si trova nell'origine

Scalatura

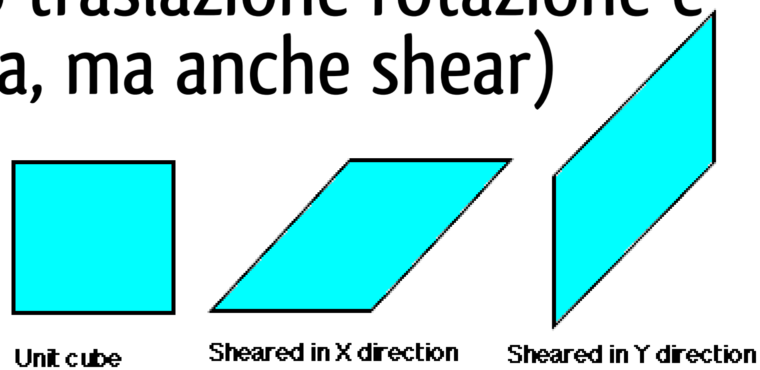
- Traslazioni e rotazioni conservano la lunghezza dei vettori.
  - sottogruppo delle trasformazioni affini chiamato trasformazioni isometriche o rigide.
- Un altro tipo di trasformazione affine che non preserva le distanze è la **scalatura** (ve ne sono anche altre)
- Dato un punto $P = (p_x, p_y, p_z, 1)$ la trasformazione di scala, o scalatura, lo trasforma nel punto $P' = (s_x p_x, s_y p_y, s_z p_z, 1)$ dove i valori (s_x, s_y, s_z) sono i fattori di scala lungo gli assi
- Una scalatura e omogenea se $s_x = s_y = s_z = s$
  - vettori semplicemente allungati (s>1) o accorciati (s<1)
  - Un punto, in una scalatura omogenea, viene invece traslato lungo la retta che passa per l'origine e per il punto stesso

Trasformazioni affini

- Una generica matrice che lavora in coordinate omogenee rappresenta una trasformazione affine (12 gradi di libertà non solo traslazione rotazione e scala, ma anche shear)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c & u \\ d & e & f & v \\ g & h & i & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

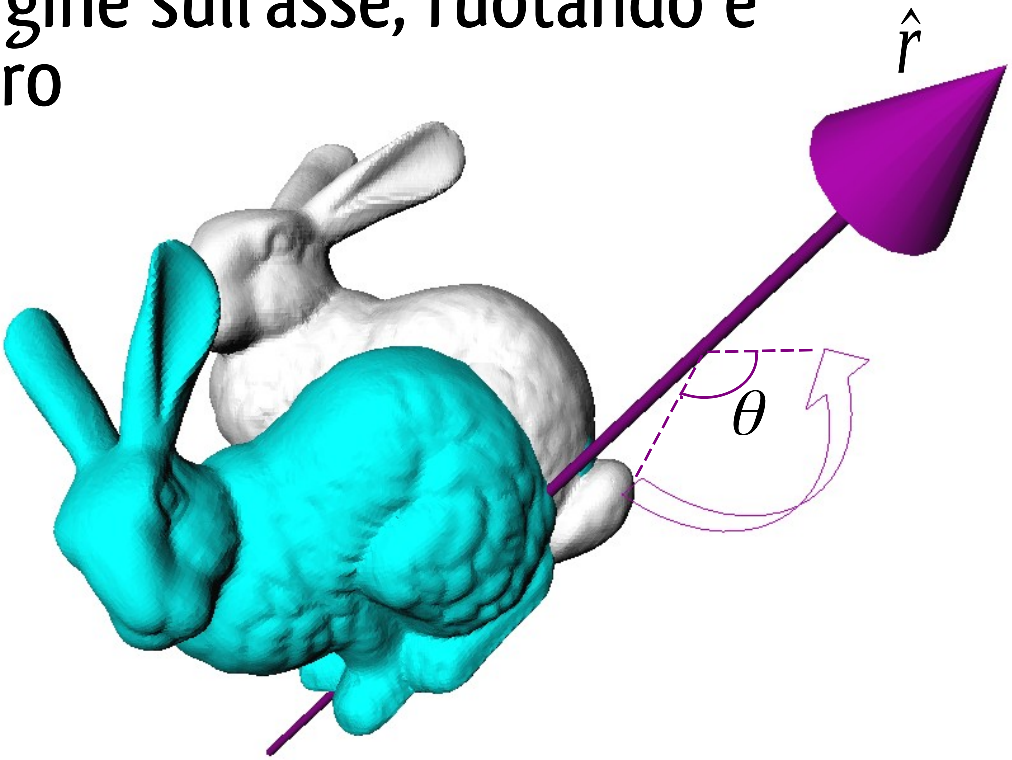


- Se t è il vettore di traslazione e R una matrice di rotazione, la trasformazione in coordinate omogenee è

$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazioni generiche

- Cerchiamo di approfondire la rappresentazione delle rotazioni e perché si usano rappresentazioni diverse
- Dobbiamo considerare rotazioni attorno a qualunque asse
- Comunque, non c'è nessuna perdita di generalità nel definirle solo attorno agli assi passanti per l'origine, dato che le altre le posso ricavare traslando l'origine sull'asse, ruotando e ritraslando l'origine all'indietro

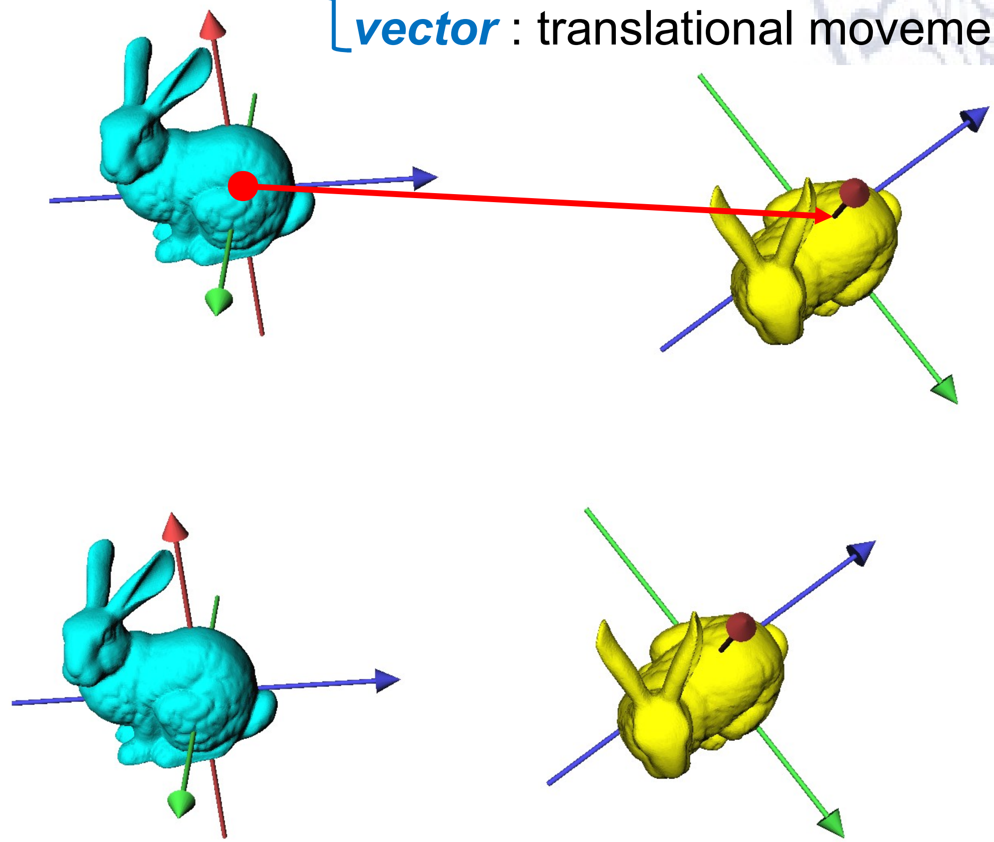


Rotazione e orientazione

- La rotazione rappresenta un cambio di orientazione
- L'orientazione rappresenta la posa di un oggetto nello spazio
- La relazione che c'è tra rotazione (movimento) e orientazione (stato) è analoga a quella tra punto e vettore
- Anche per le operazioni
  - orientazione+rotazione=orientazione
  - rotazione+rotazione=rotazione
- In 2D si rappresenta la rotazione semplicemente con un angolo
- In 3D esistono molte rappresentazioni equivalenti

Analogia

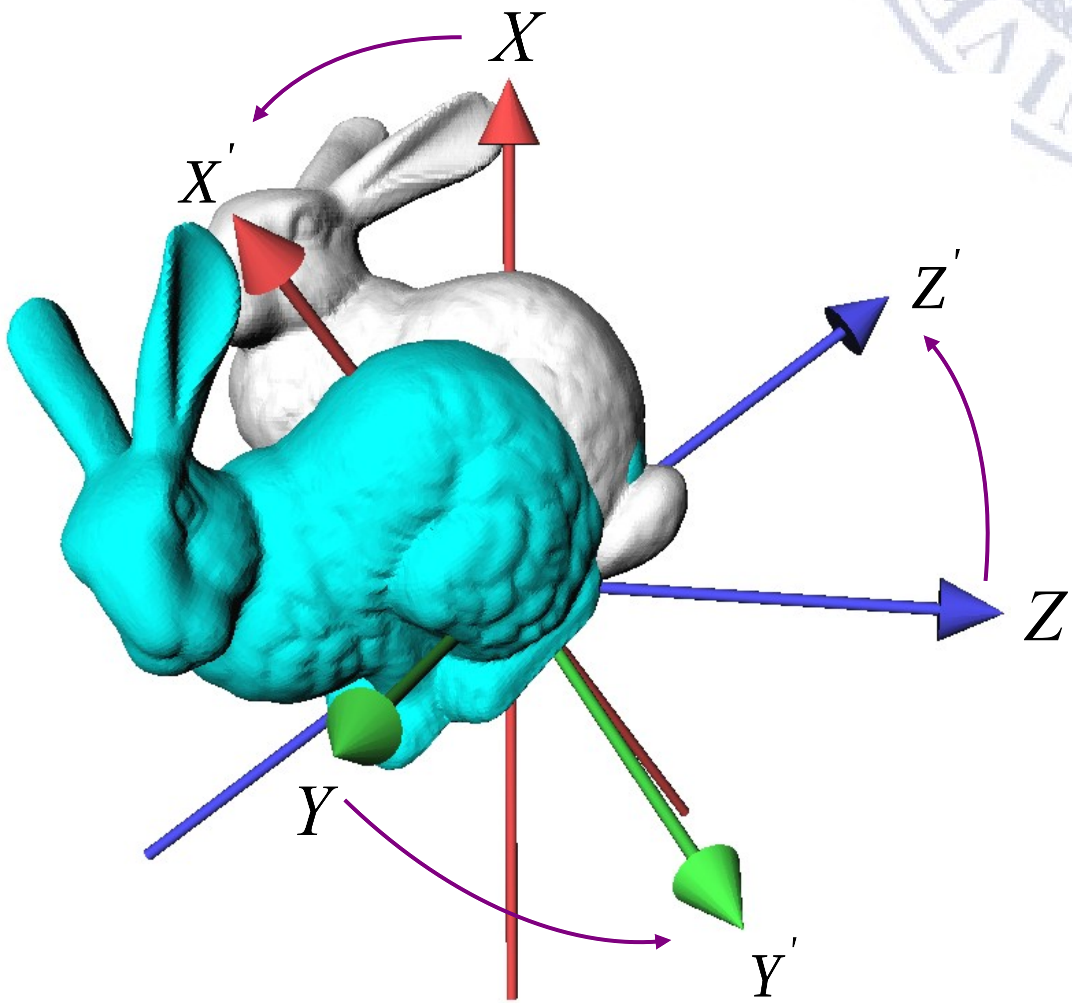
point : the 3d location of the bunny
vector : translational movement



orientation : the 3d orientation of the bunny
rotation : circular movement

Rotazione 3D

- Due orientazioni generiche



Teorema della rotazione di Eulero

The general displacement of a rigid body with one point fixed is a rotation about some axis

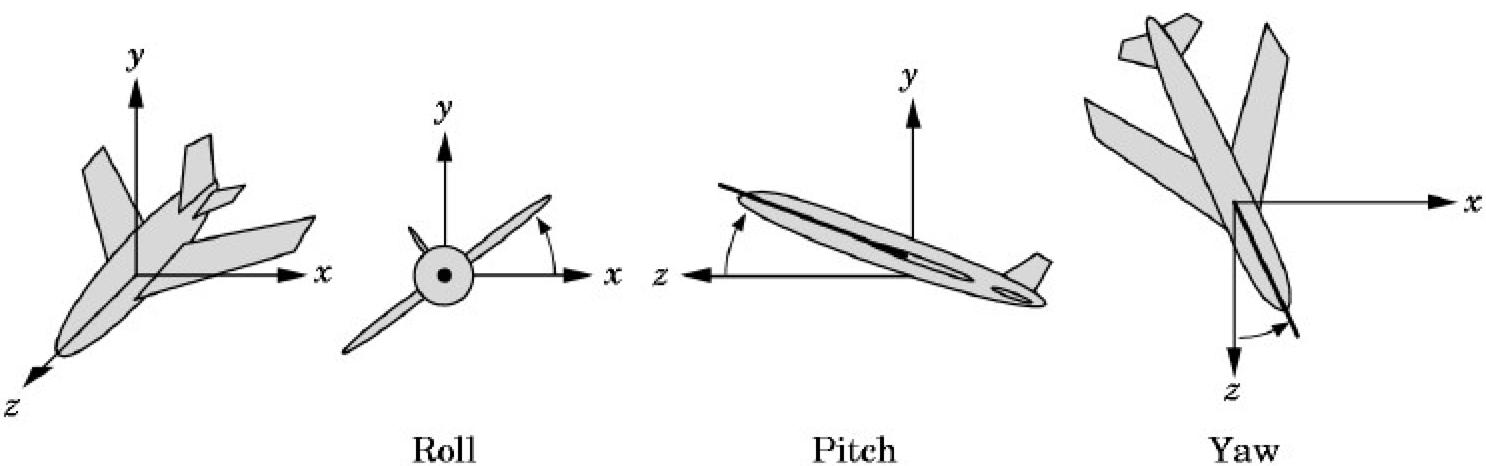
Leonhard Euler (1707-1783)

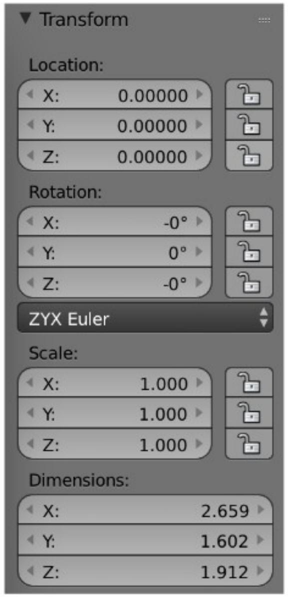
- Qualsiasi rotazione si può esprimere come rotazione di un angolo rispetto a un asse
- Qualsiasi rotazione lascia invariati un vettore invariato (l'asse)

- Come si rappresenta una rotazione generica?
  - Angoli di Eulero
  - Asse/angolo
  - Quaternioni

Rotazioni generiche

- Una rotazione qualsiasi rispetto ad un asse passante per l'origine puo essere decomposta nel prodotto di tre rotazioni rispetto agli assi coordinati; i tre angoli prendono il nome di **angoli di Eulero**
- La rappresentazione con gli angoli di Eulero non è univoca, a terne diverse può corrispondere la stessa trasformazione.
  - Una delle rappresentazioni di Eulero impiega gli angoli roll (rollio), pitch (beccheggio) e yaw (imbardata), di derivazione aeronautica.
  - Usata in programmi di modellazione





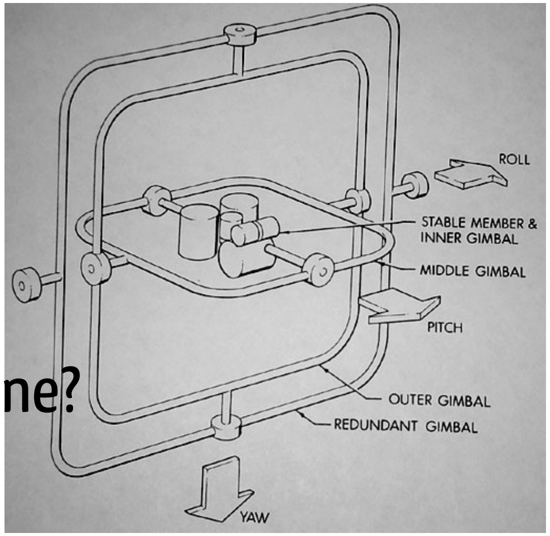
[Blender]

Rotazioni come sequenza di rotazioni XYZ

- Si possono usare differenti sequenze di rotazione rispetto a diversi assi
- Con la convenzione degli angoli di Eulero
- E' una rappresentazione comoda quando si mappano su controlli come quello degli aerei
- Ma non è una rappresentazione semplice e naturale di una rotazione generica
- Dipende dall'ordine delle rotazioni
- E ci sono alcune controindicazioni….

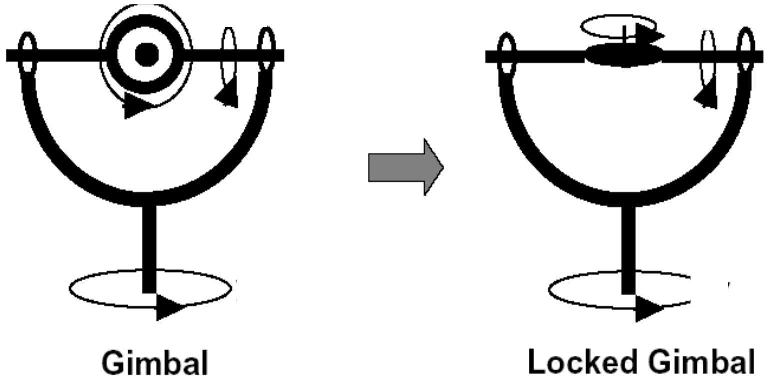
Problemi con angoli Eulero

- Ci sono alcuni problemi con le rappresentazioni delle rotazioni
- Angoli di Eulero:
  - Rotazioni non univoche
    - Es: (z, x, y) [roll, yaw, pitch] = (90, 45, 45) = (45, 0, -45)
      mandano entrambi l'asse x in direzione (1, 1, 1)
  - Gimbal Lock (blocco del giroscopio)
    - Gimbal: dispositivo meccanico usato per supportare giroscopi o bussole
    - Ci sono configurazioni problematiche
  - Interpolazione di rotazioni
    - Come calcoliamo il punto medio di una rotazione?



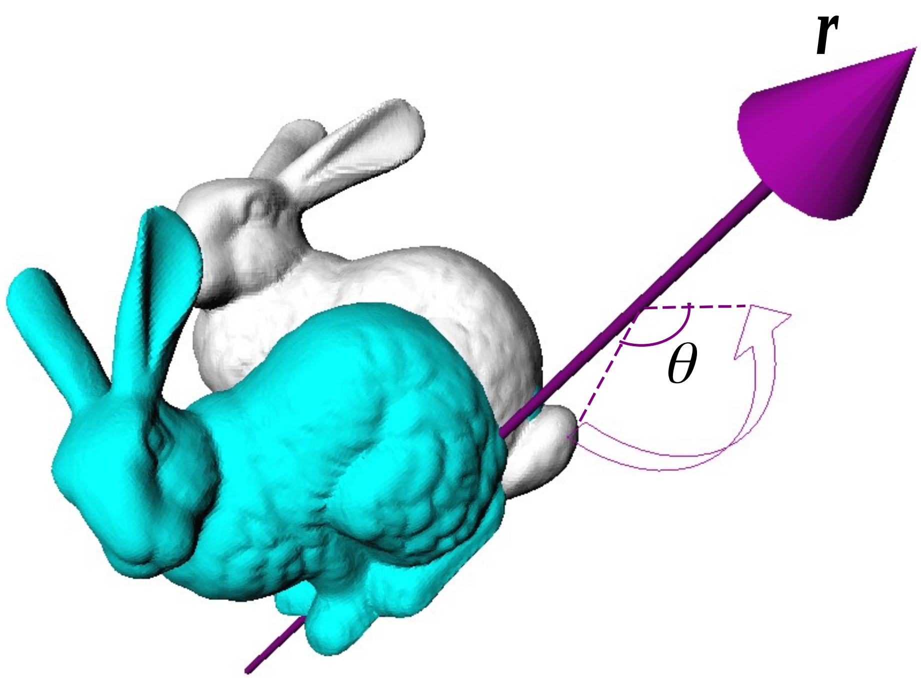
Gimbal lock

- eseguiamo una rotazione di 90° attorno all'asse y
- Il sistema perde un grado di libertà



$$R_z(\theta_z)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x) \approx \begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta_x - \theta_z) & \cos(\theta_x - \theta_z) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x - \theta_z) & -\sin(\theta_x - \theta_z) & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Axis-angle

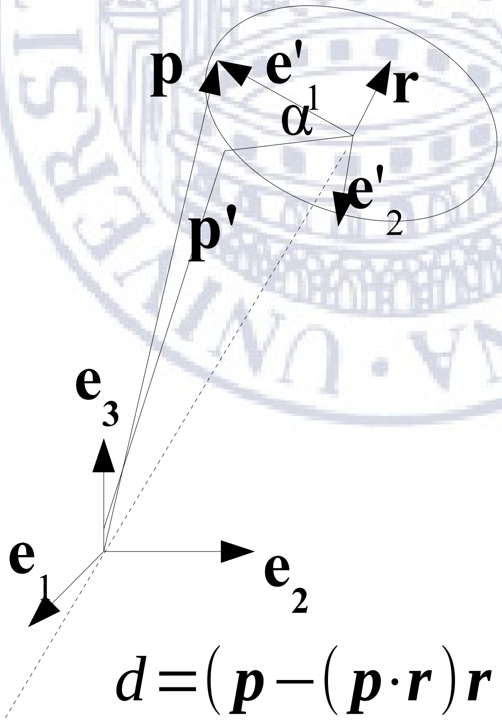


$\boldsymbol{r}$: unit vector

θ : scalar angle

Rotazione asse/angolo

- Consideriamo la rotazione del punto $\mathbf{p}$ attorno all'asse con direzione $\mathbf{r}$
  - Ricordando le slide precedenti, posso descriverla semplicemente nel sistema di riferimento $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{r}$ dove $\mathbf{r}$ è il versore di rotazione $\mathbf{e'}_1$ l'asse x messo sulla direzione della distanza punto p asse, $\mathbf{e'}_2$ dato dal prodotto vettore di r ed e'_1 poi applicare la matrice che mappa nel sistema di riferimento base



$$d = (\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{21} & r_1 & O'_1 \\ e'_{12} & e'_{22} & r_2 & O'_2 \\ e'_{13} & e'_{23} & r_3 & O'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\cos\alpha \\ d\sin\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos\alpha(\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}) + \sin\alpha\, \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{O}') + \boldsymbol{O}'$$

$$\boldsymbol{p}' = \cos\alpha\, \boldsymbol{p} + (1 - \cos\alpha)(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} + \sin\alpha(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$$

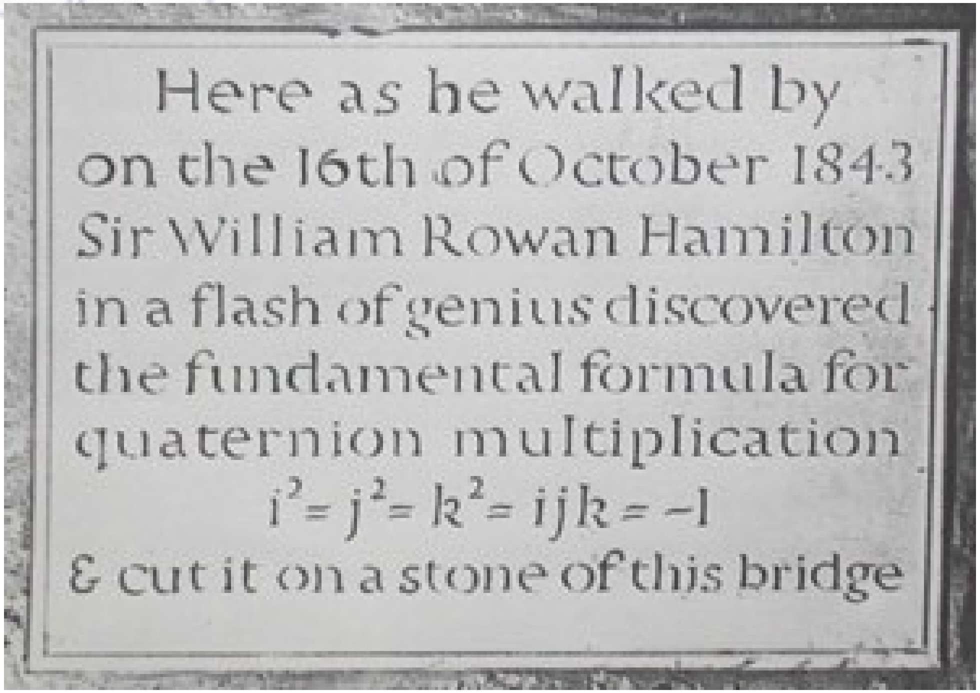
Rotazione asse angolo

- La rotazione generica asse angolo con asse r si può anche rappresentare con la seguente matrice, dove c = cos(α) e s = sin(α) :

$$R(\alpha, \boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} (1-c)r_1^2+c & (1-c)r_1r_2-sr_3 & (1-c)r_1r_2+sr_2 & 0 \\ (1-c)r_1r_2+sr_3 & (1-c)r_2^2+c & (1-c)r_2r_2-sr_1 & 0 \\ (1-c)r_1r_3-sr_2 & (1-c)r_2r_3+sr_1 & (1-c)r_3^2+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aggiungendo le traslazioni dall'origine al punto e indietro si possono scrivere generiche rotazioni

Quaternioni



- William Rowan Hamilton (1805-1865)
  - Numeri complessi (1833)

$$x + iy \quad \textbf{where} \quad i^2 = -1$$

- Quaternioni (1843)

$$w + ix + jy + kz \quad \textbf{where} \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

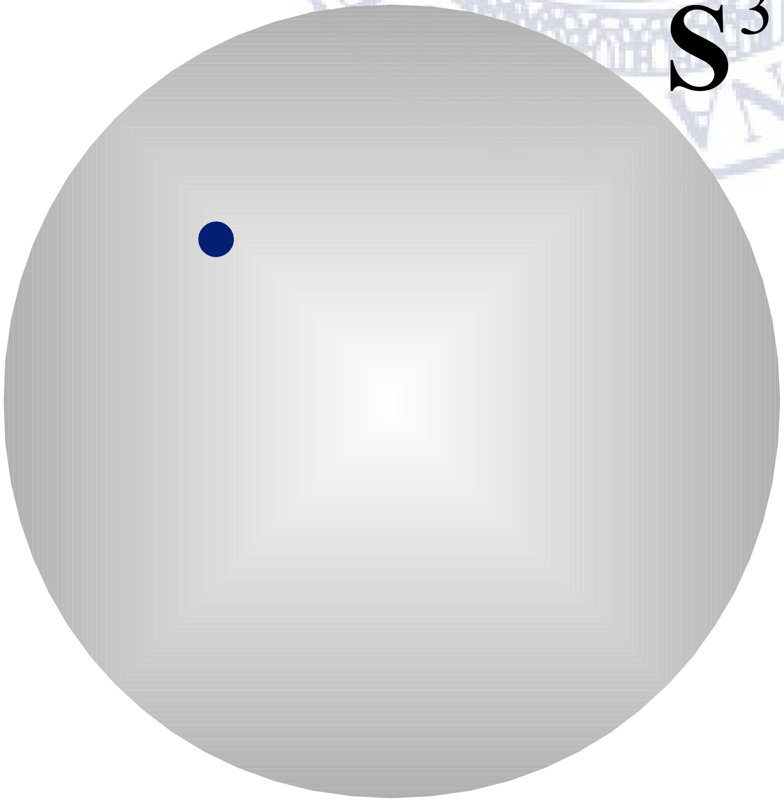
$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

Quaternioni unitari e rotazioni

- I quaternioni unitari (normalizzati) rappresentano le rotazioni

$$\mathbf{q} = w + ix + jy + kz$$
$$= (w, x, y, z)$$
$$= (w, \mathbf{v})$$

$\mathbf{S}^3$



$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Algebra dei quaternioni unitari

- Identità

$$q = (1,0,0,0)$$

- Moltiplicazione

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 &= (w_1, \mathbf{v}_1)(w_2, \mathbf{v}_2) \\ &= (w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\end{aligned}$$

- Inverso

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^{-1} &= (w, -x, -y, -z)/(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (-w, x, y, z)/(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)\end{aligned}$$

  - Rotazione con asse in direzione opposta o angolo negativo

$$\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{q}^{-1} = (1,0,0,0)$$

- Lo spazio dei quaternioni unitari è
  - Chiuso rispetto a moltiplicazione e inversione
  - Non per addizione e sottrazione

Algebra dei quaternioni unitari

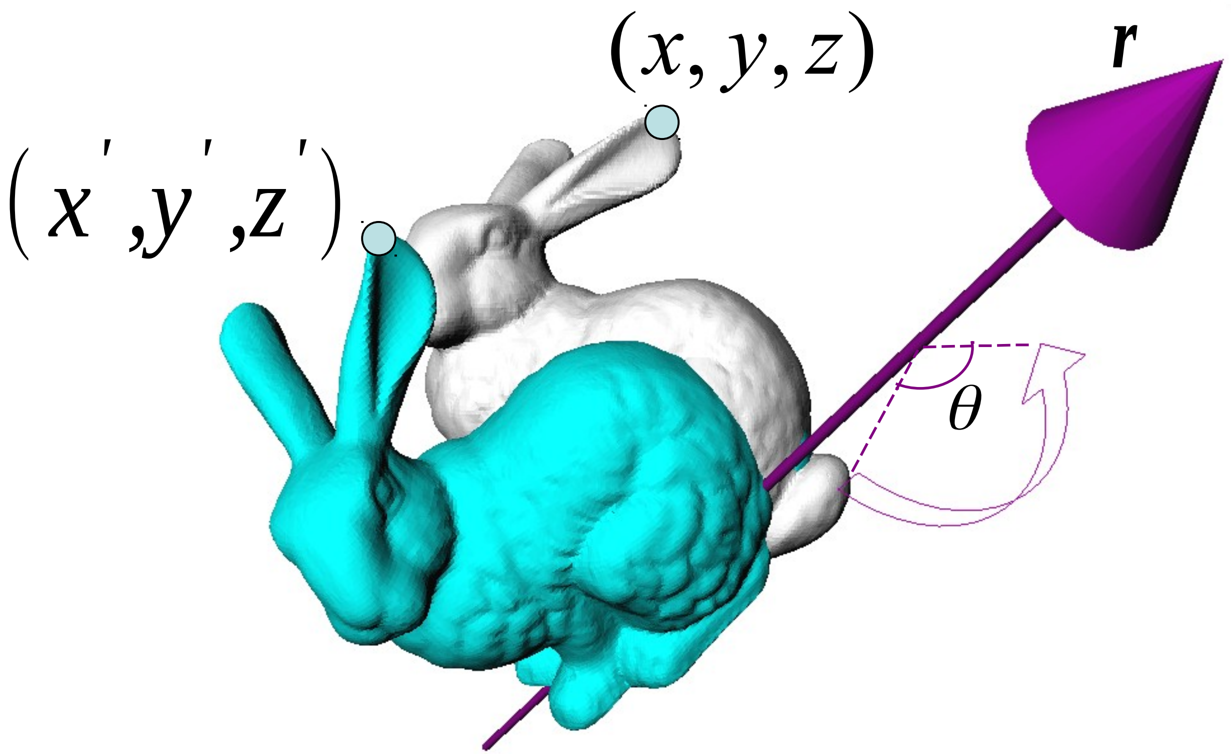
- Antipodal equivalence
  - q and –q represent the same rotation

$$R_q(p) = R_{-q}(p)$$

  - ex) rotation by π-θ about opposite direction
  - 2-to-1 mapping between S and SO(3)
  - Twice as fast as in SO(3)

Quaternioni e rotazioni

- Rotazione attorno a r dell'angolo θ



$$q = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \boldsymbol{r}\sin\frac{\theta}{2} \right)$$

$$p' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1} \quad \text{dove} \quad \mathbf{p} = (0, x, y, z)$$

Quaternione puramente immaginario

Infatti

- Data la definizione

$$q\,\boldsymbol{p}\,q^{-1}=\left(\cos\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{r}\right)(0,\boldsymbol{p})\left(\cos\frac{\alpha}{2},-\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{r}\right)$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{r}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}),\cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{p}-\sin\frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r})\right)$$

$$\left(0,\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\boldsymbol{r}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r})\right)$$

- E ricordando le relazioni trigonometriche

$$\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\alpha \quad 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=(1-\cos\alpha) \qquad 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$$

- Otteniamo la stessa formula ottenuta con l'analisi geometrica

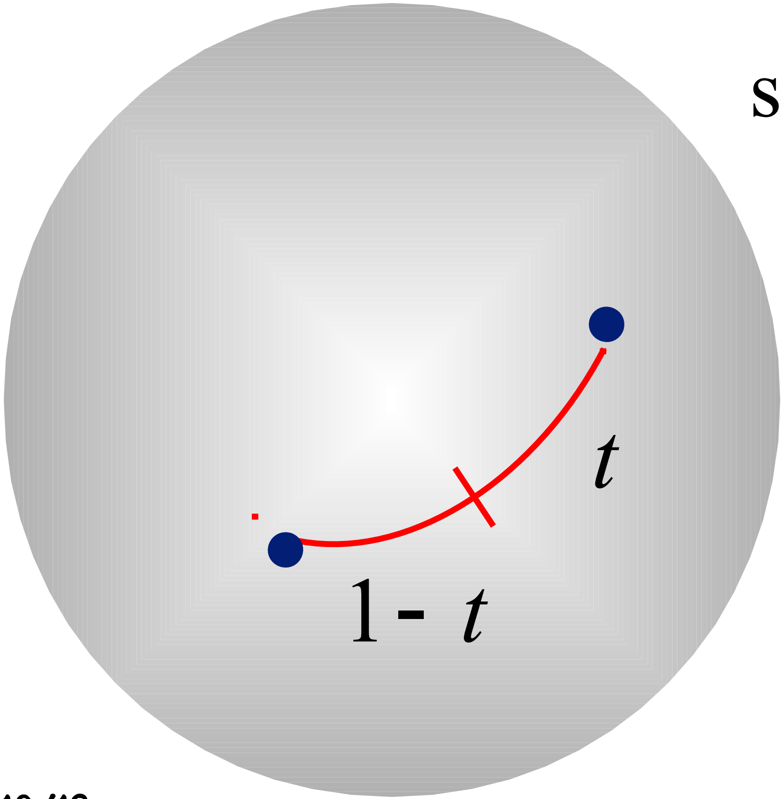
$$\boldsymbol{p}'=\cos\alpha\,\boldsymbol{p}+(1-\cos\alpha)(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}+\sin\alpha(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})$$

Vantaggi

- Operazioni più rapide
- Notazone più concisa per le composizioni di rotazioni
- Numericamente stabile per piccole rotazioni·
- Si può convertire a asse/angolo
- Adatta per interpolazione/animazione

Interpolazione lineare sferica

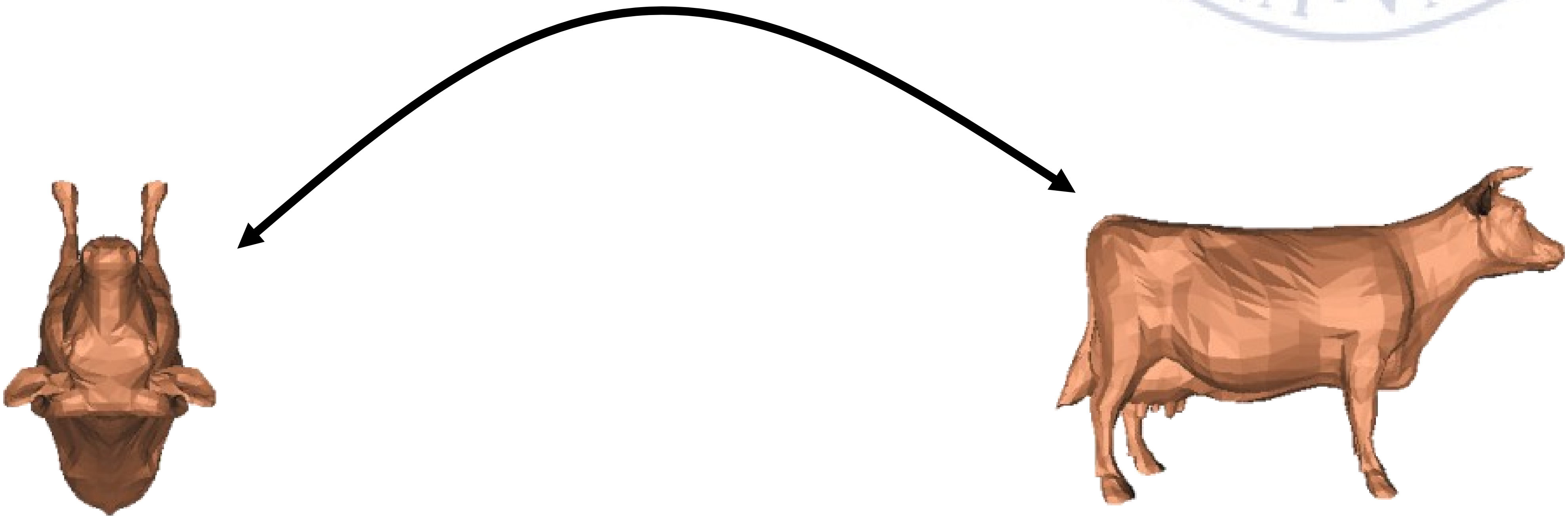
- SLERP (spherical linear interpolation) [Shoemake 1985] Interpolazione lineare di due orientazioni parametrizzata da t tra 0 e 1
- Rotazione con t velocità costante



$$\mathrm{slerp}_t(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \mathbf{q}_1(\mathbf{q}_1^{-1}\mathbf{q}_2)^t$$
$$= \mathbf{q}_1 \exp(t \cdot \log(\mathbf{q}_1^{-1}\mathbf{q}_2))$$

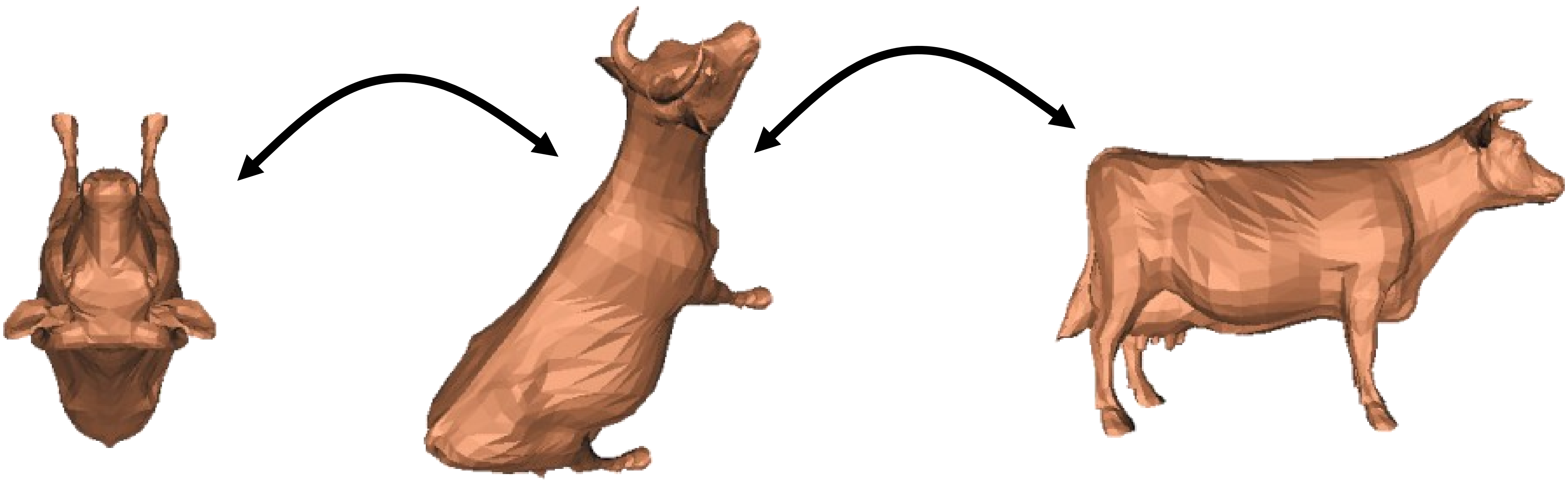
Quaternions and Interpolation

- Given two orientations q_1 and q_2, find the orientation halfway between



Quaternions and Interpolation

- Given two orientations q_1 and q_2, find the orientation halfway between



Quaternions and Interpolation

Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation

Quaternions and Interpolation

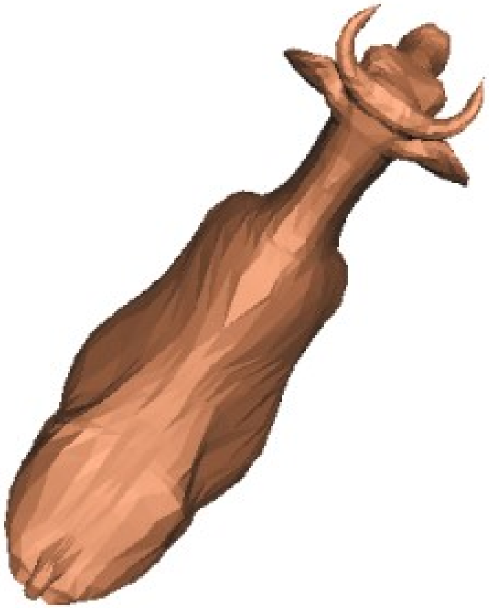
Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation

Quaternions and Interpolation

Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation



Quaternions and Interpolation

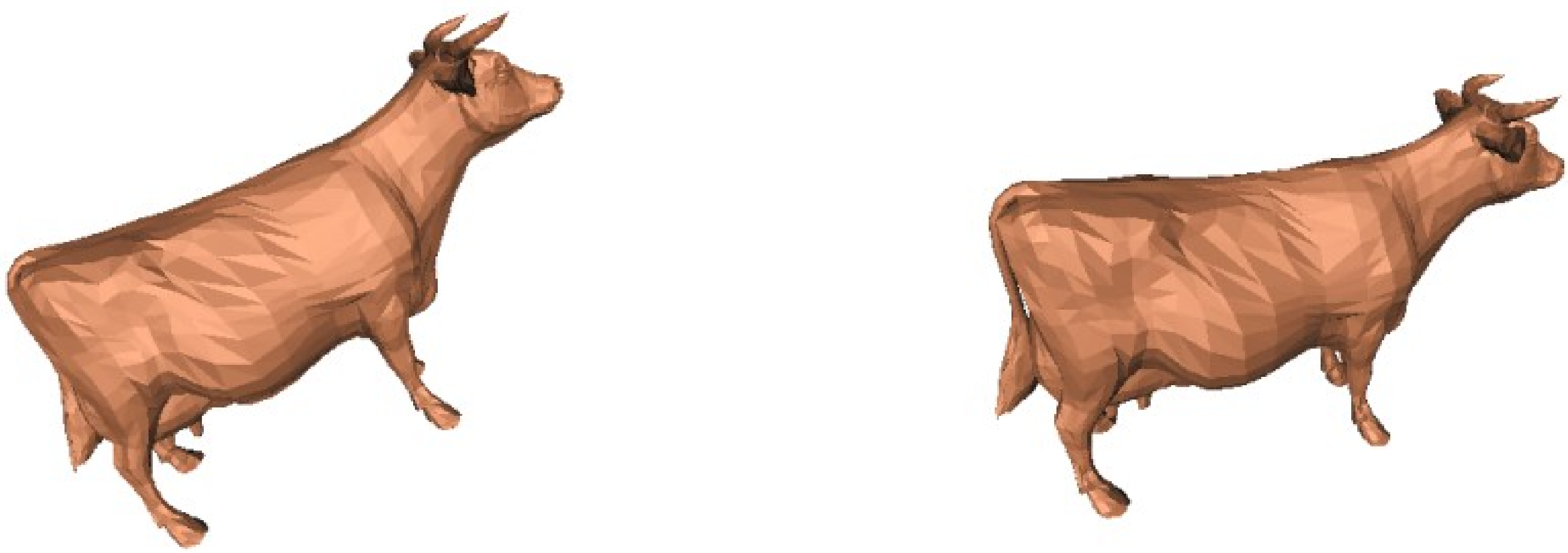
Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation

Quaternions and Interpolation

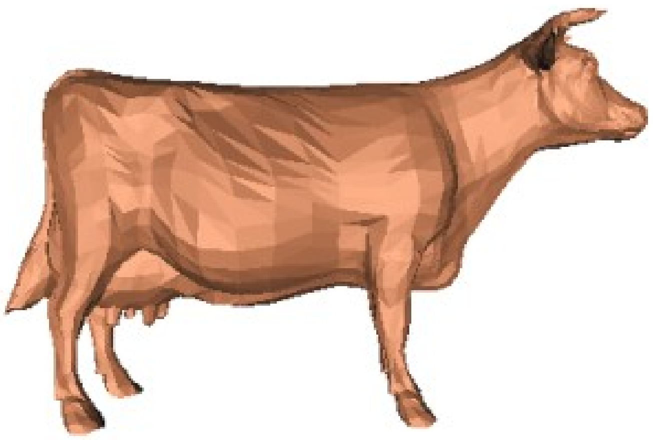
Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation

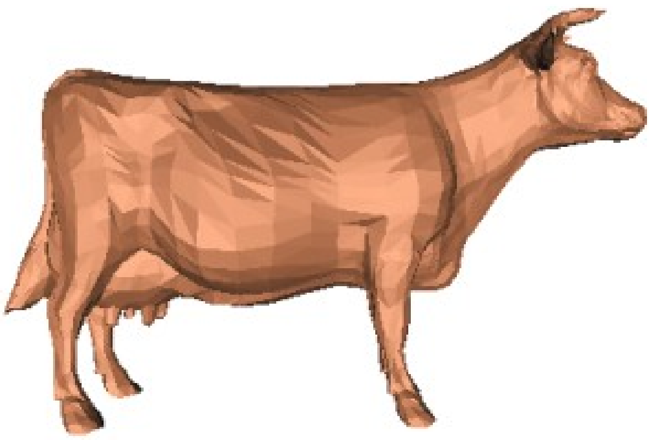


Quaternions and Interpolation

Quaternion Interpolation



Euler Angle Interpolation



Quaternions and Interpolation

Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation

Quaternions and Interpolation

Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation

Quaternions and Interpolation

Quaternion Interpolation

Euler Angle Interpolation

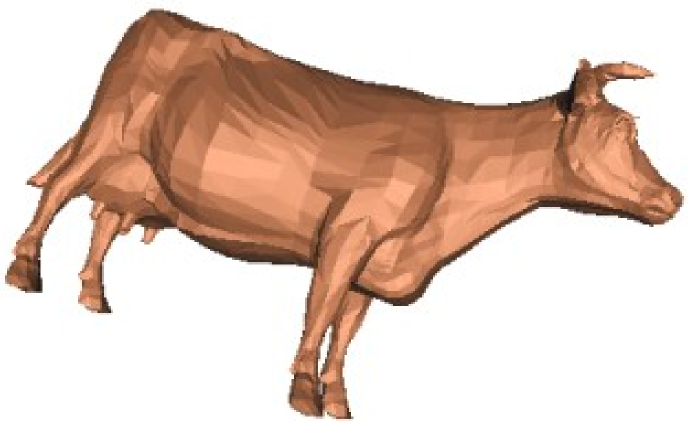
Quaternions and Interpolation

Quaternion Interpolation

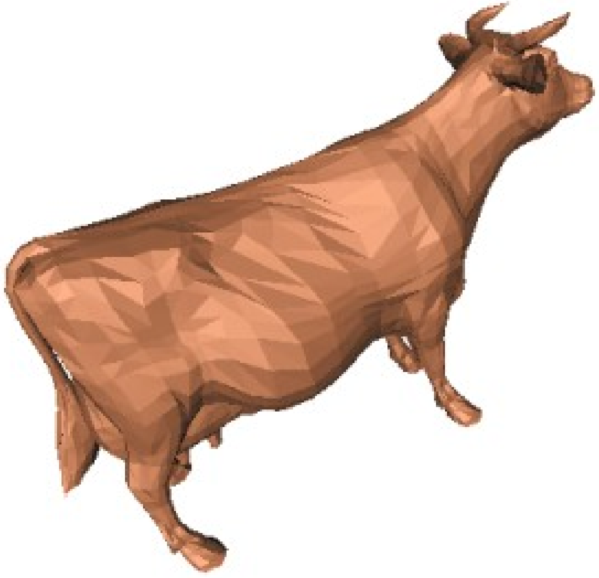
Euler Angle Interpolation

Quaternions and Interpolation

Quaternion Interpolation

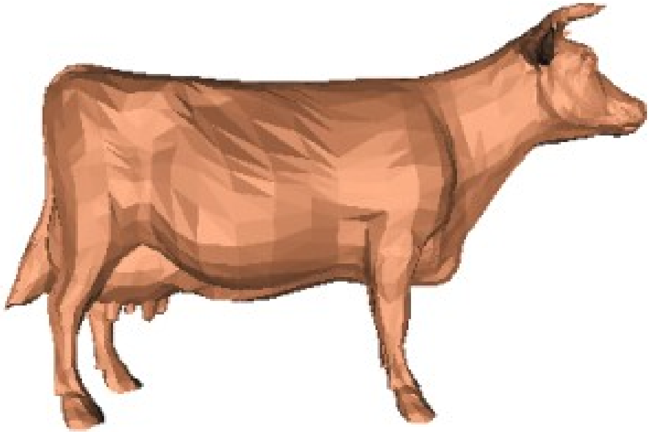


Euler Angle Interpolation

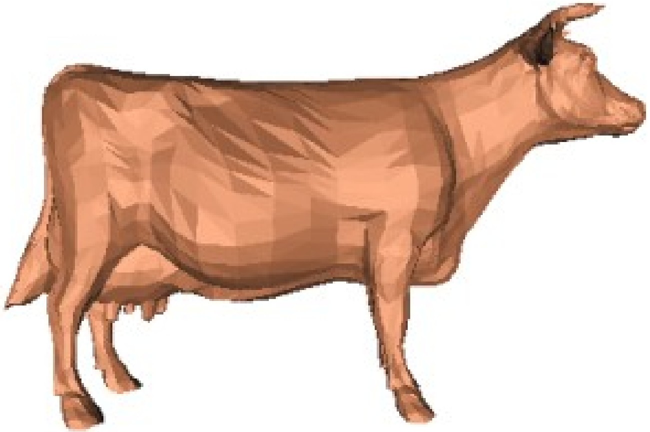


Quaternions and Interpolation

Quaternion Interpolation



Euler Angle Interpolation



Conversione

Si possono sempre comunque convertire le rotazioni tra quaternione e matrice asse/angolo

Esempio

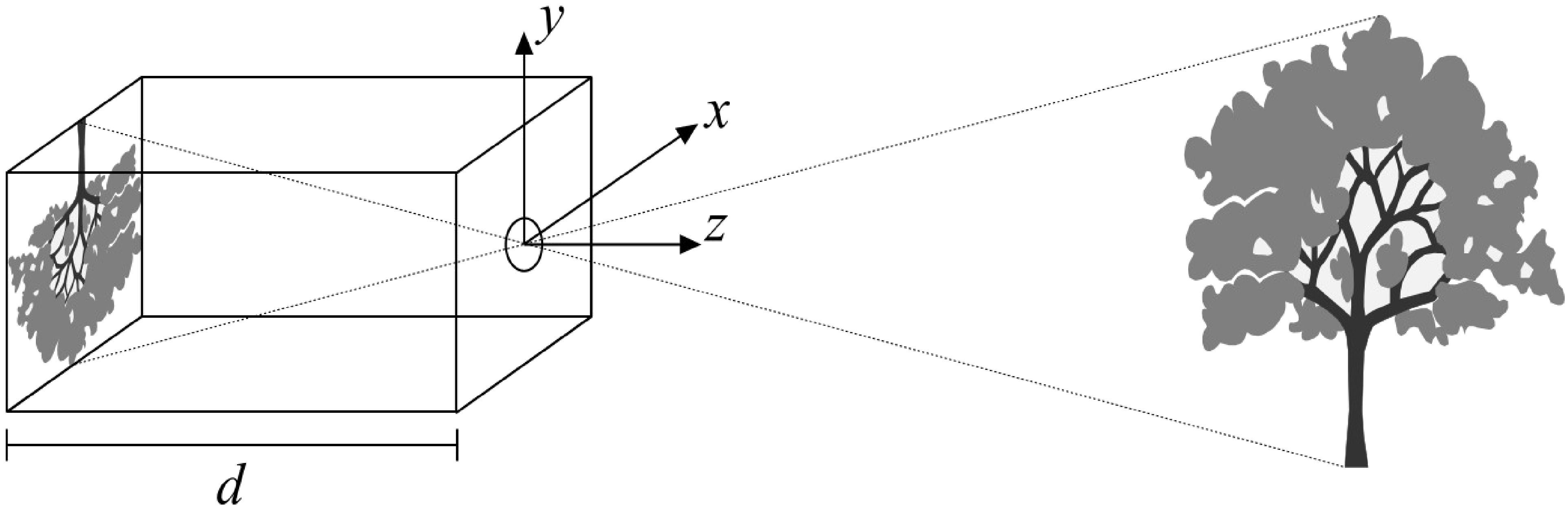
$$R=\begin{pmatrix} q_0^2+q_x^2-q_y^2-q_z^2 & 2q_xq_y-2q_0q_z & 2q_xq_z+2q_0q_y & 0 \\ 2q_xq_y+2q_0q_z & q_0^2-q_x^2+q_y^2-q_z^2 & 2q_yq_z-2q_0q_x & 0 \\ 2q_xq_z-2q_0q_y & 2q_yq_z+2q_0q_x & q_0^2-q_x^2-q_y^2+q_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici e proiezioni

- Abbiamo il nostro mondo dove creare la scena inserendo i modelli: spazio Euclideo
- Sappiamo trasformare i punti dello spazio traslando, ruotando e scalando
- Per simulare la formazione delle immagini ci serve un ultimo strumento geometrico: la modellazione della proiezione degli oggetti sul piano immagine
- Questo si fa con la proiezione prospettica o, in casi semplificati, con la proiezione ortografica o parallela
- Anche queste si possono modellare con matrici, solo che dovranno trasformare uno spazio 3D in uno 2D (espressi in coordinate omogenee). Quindi sono matrici

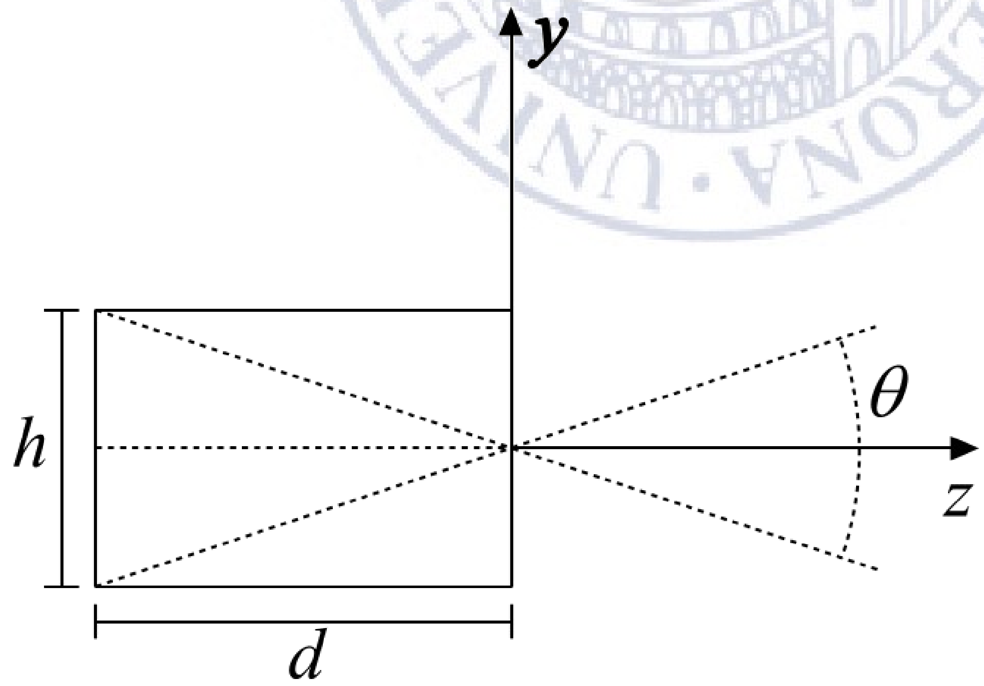
La macchina fotografica virtuale

- La metafora utilizzata per descrivere le relazioni scena/osservatore è quella della macchina fotografica virtuale (synthetic camera).
- Il modello semplice usato anche in Computer Vision è la telecamera pinhole



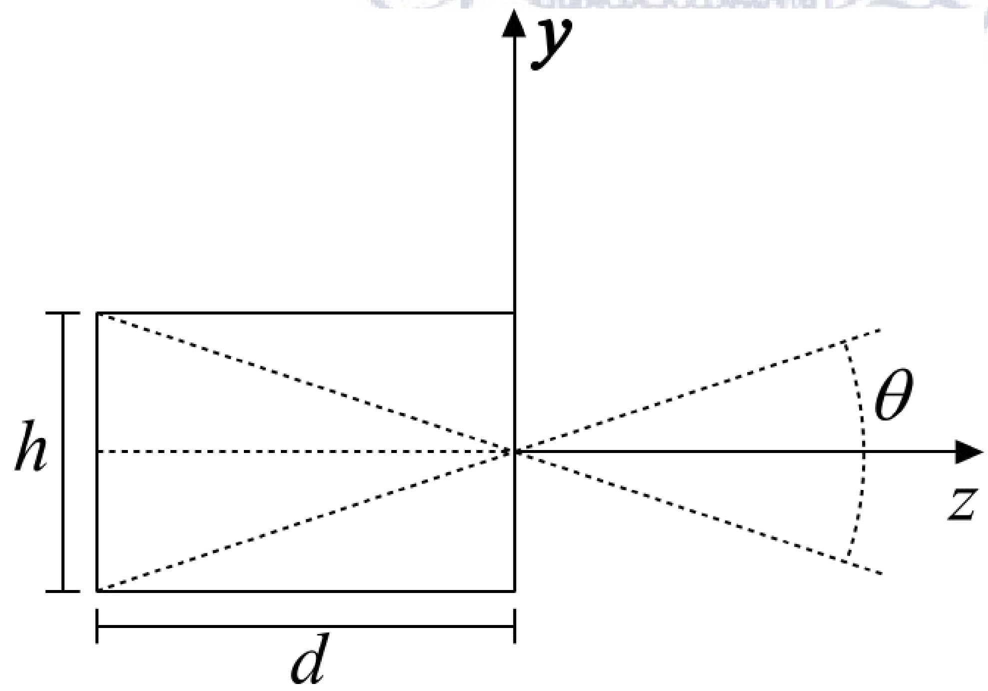
La macchina fotografica virtuale

- La macchina fotografica virtuale è costituita da un parallelepipedo in cui la faccia anteriore presenta un foro di dimensioni infinitesime (pinhole camera) e sulla faccia posteriore si formano le immagini



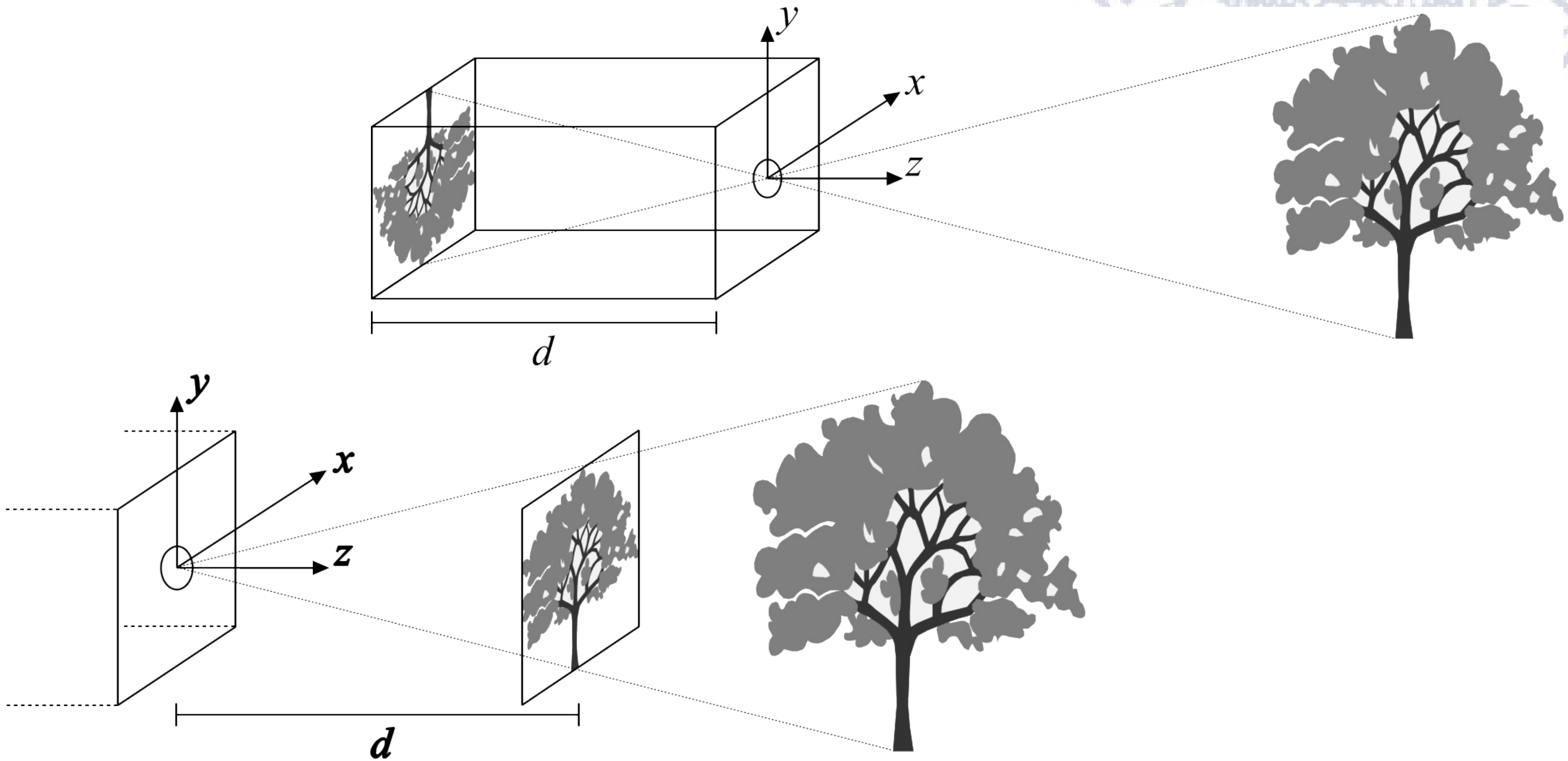
La macchina fotografica virtuale

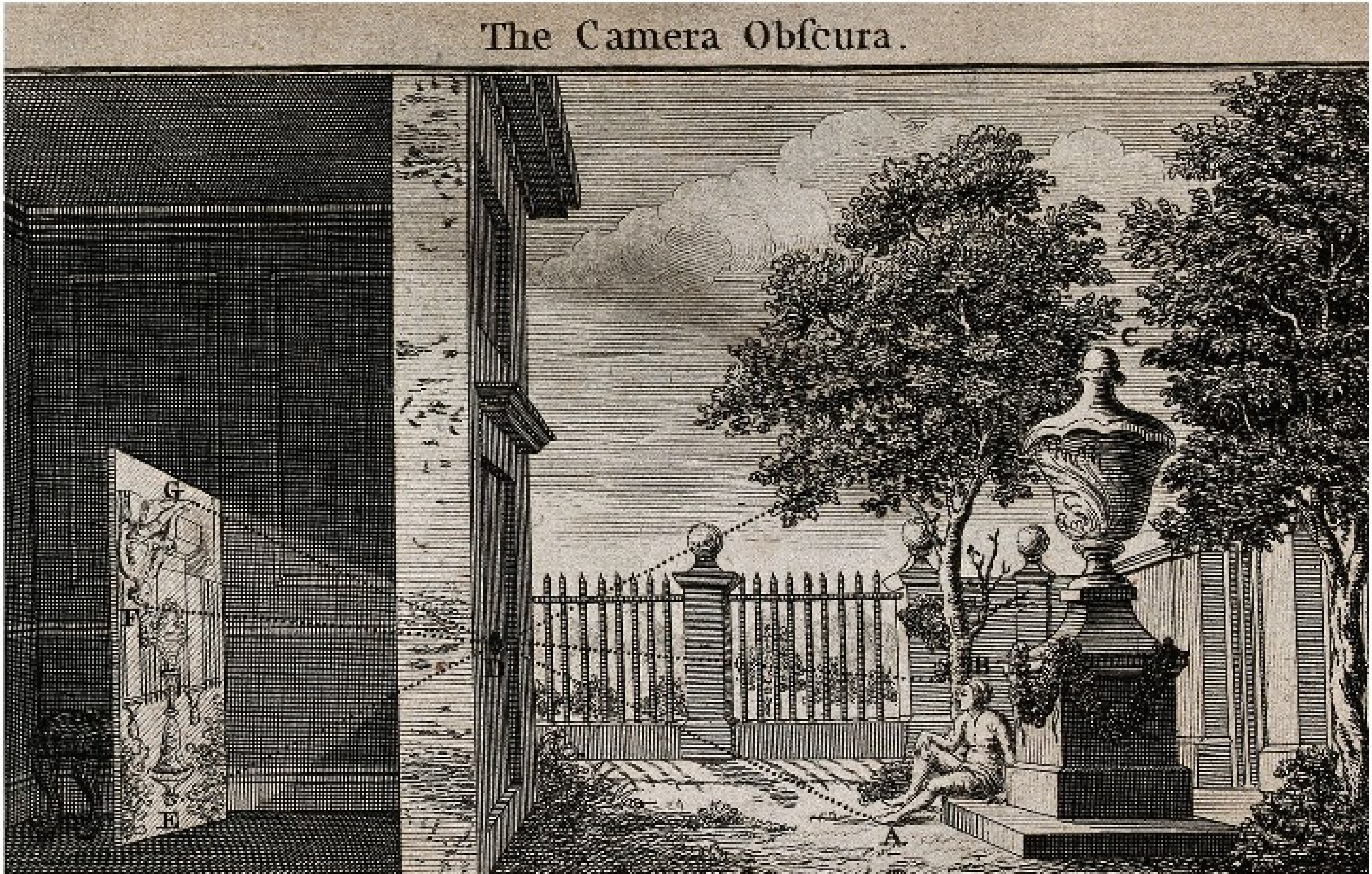
- Immagini nitide, nessun problema di luminosità, l'angolo di vista può essere modificato variando il rapporto tra la distanza focale (d) e la dimensione del piano immagine



La macchina fotografica virtuale

- Per convenzione (e maggiore semplicità) si assume l'esistenza di un piano immagine tra la scena ed il centro di proiezione
- Ne risulta il modello matematico della proiezione prospettica





[WikipediaCommons]

La flagellazione” di Piero della Francesca (1469)

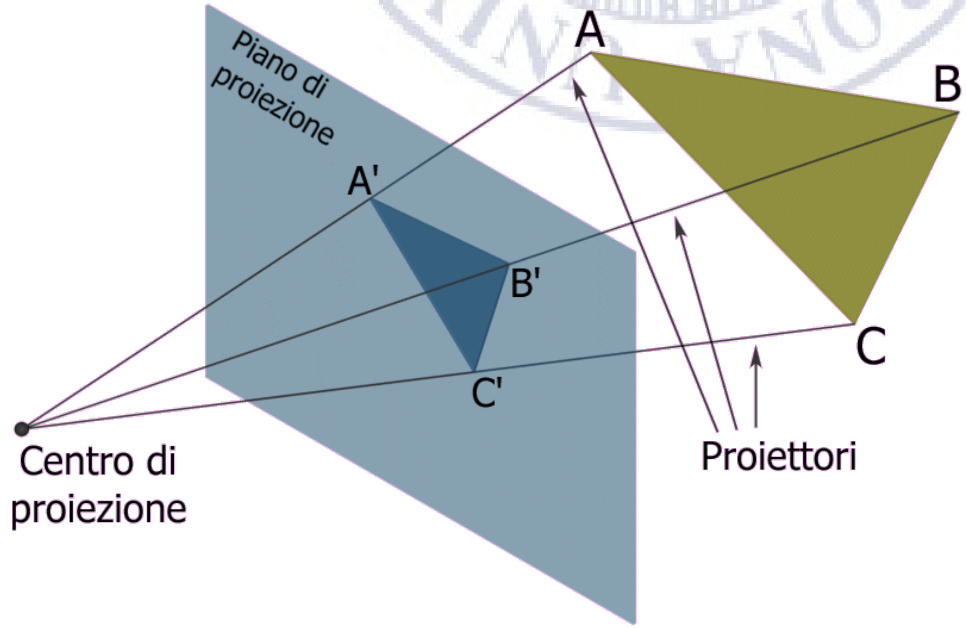
Proiezione prospettica

- La relazione che lega i punti 3D ai punti sul piano in questa ipotesi è data dalla proiezione prospettica. Con semplici ragionamenti sui triangoli simili si ha che la proiezione di un punto $P = (P_x, P_y, P_z)$ è data da $P' = (-P_x d/P_z, -P_y d/P_z, 1)$, se mettiamo il piano immagine dietro, $P' = (P_x d/P_z, P_y d/P_z, 1)$, per il piano immagine davanti
- Possiamo scrivere la proiezione in forma matriciale:

$$\boldsymbol{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z/d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\,P_x/P_z \\ d\,P_y/P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

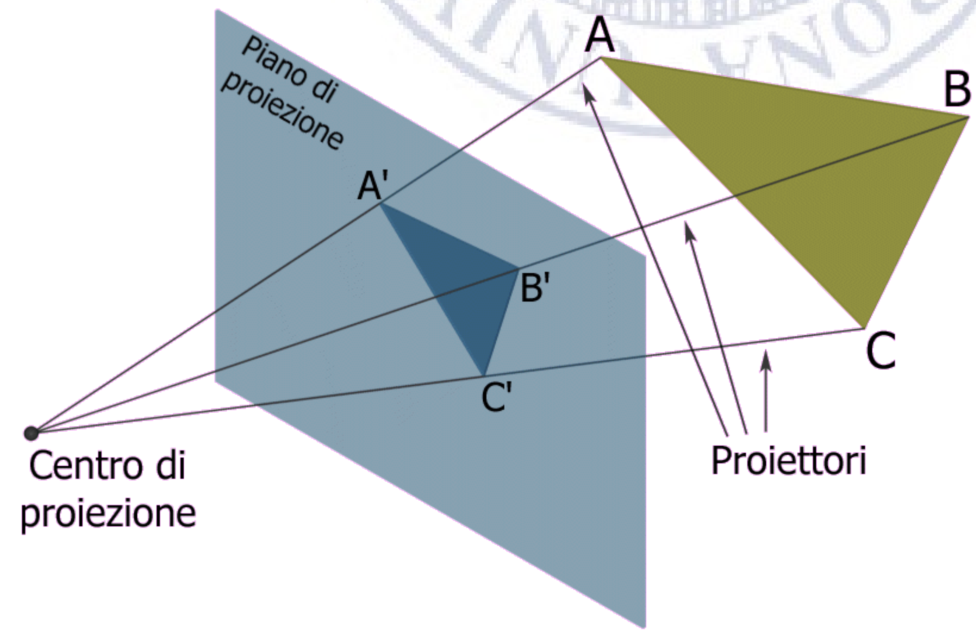
Trasformazioni di proiezione

- Da un punto di vista geometrico, la proiezione è definita per mezzo di un insieme di rette di proiezione (i proiettori) aventi origine comune in un centro di proiezione, passanti per tutti i punti dell'oggetto da proiettare ed intersecanti un piano di proiezione



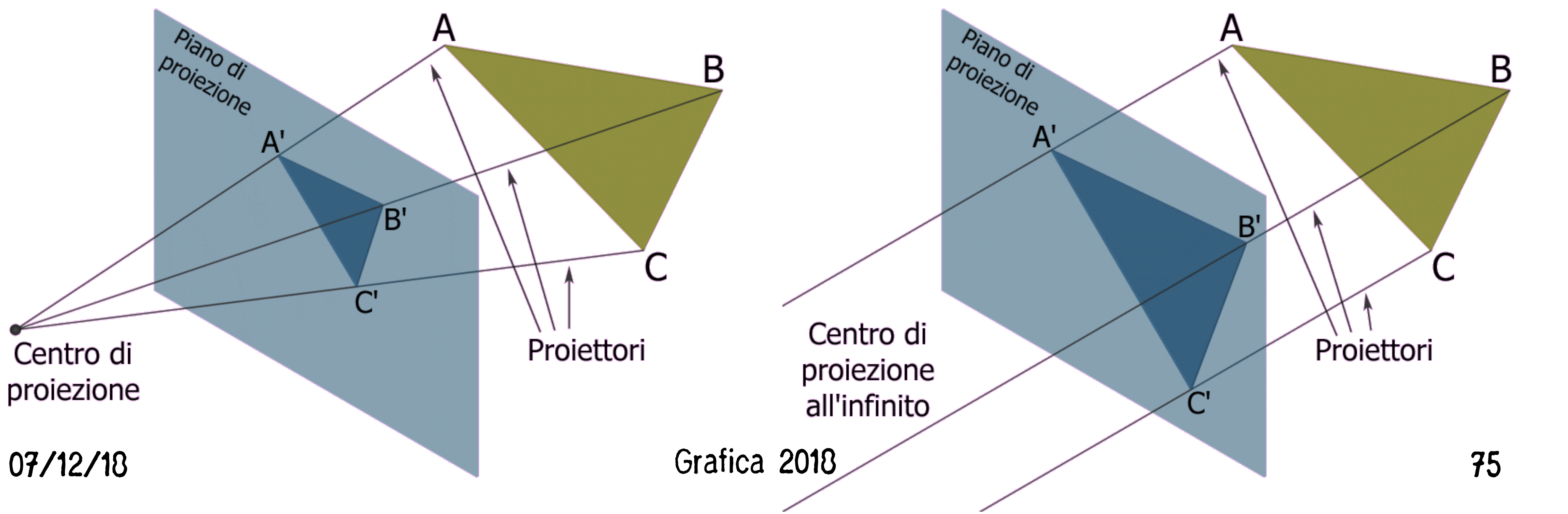
Trasformazioni di proiezione

- La proiezione di un segmento è a sua volta un segmento
- Non è quindi necessario calcolare i proiettori di tutti i punti di una scena, ma solo quelli relativi ai vertici delle primitive che la descrivono



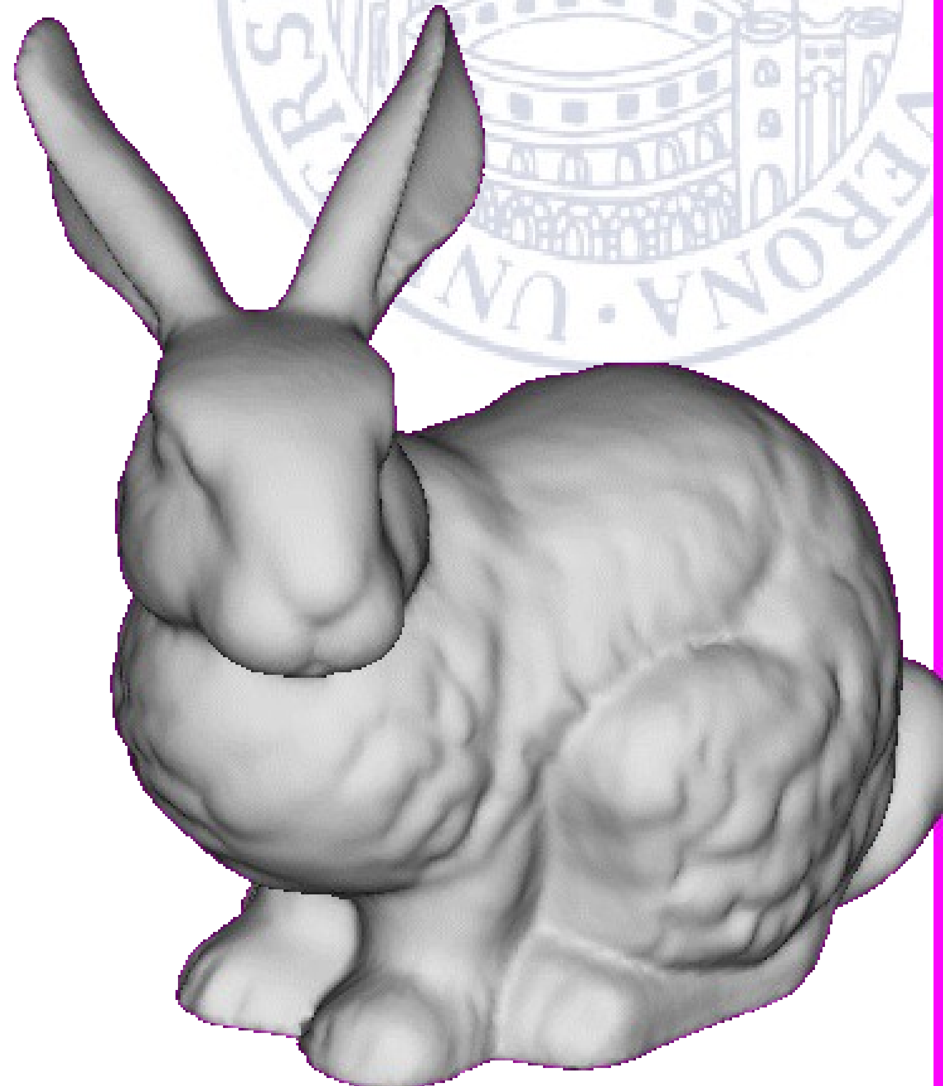
Trasformazioni di proiezione

- Le proiezioni geometriche piane si classificano in:
  - Proiezioni **prospettiche** (distanza finita tra il centro ed il piano di proiezione)
  - Proiezioni **parallele** (distanza infinita tra il centro ed il piano di proiezione)



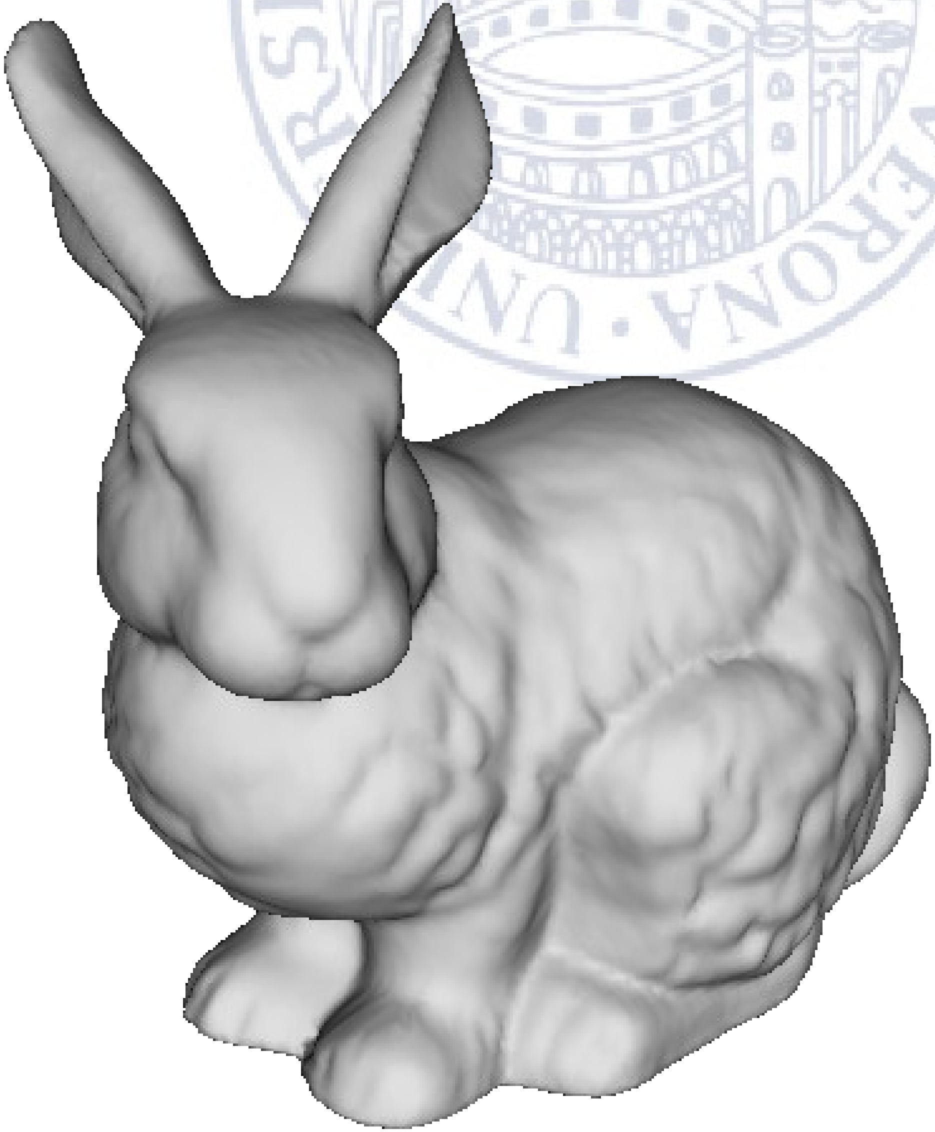
Proiezioni prospettiche

- Al variare della distanza focale (d)



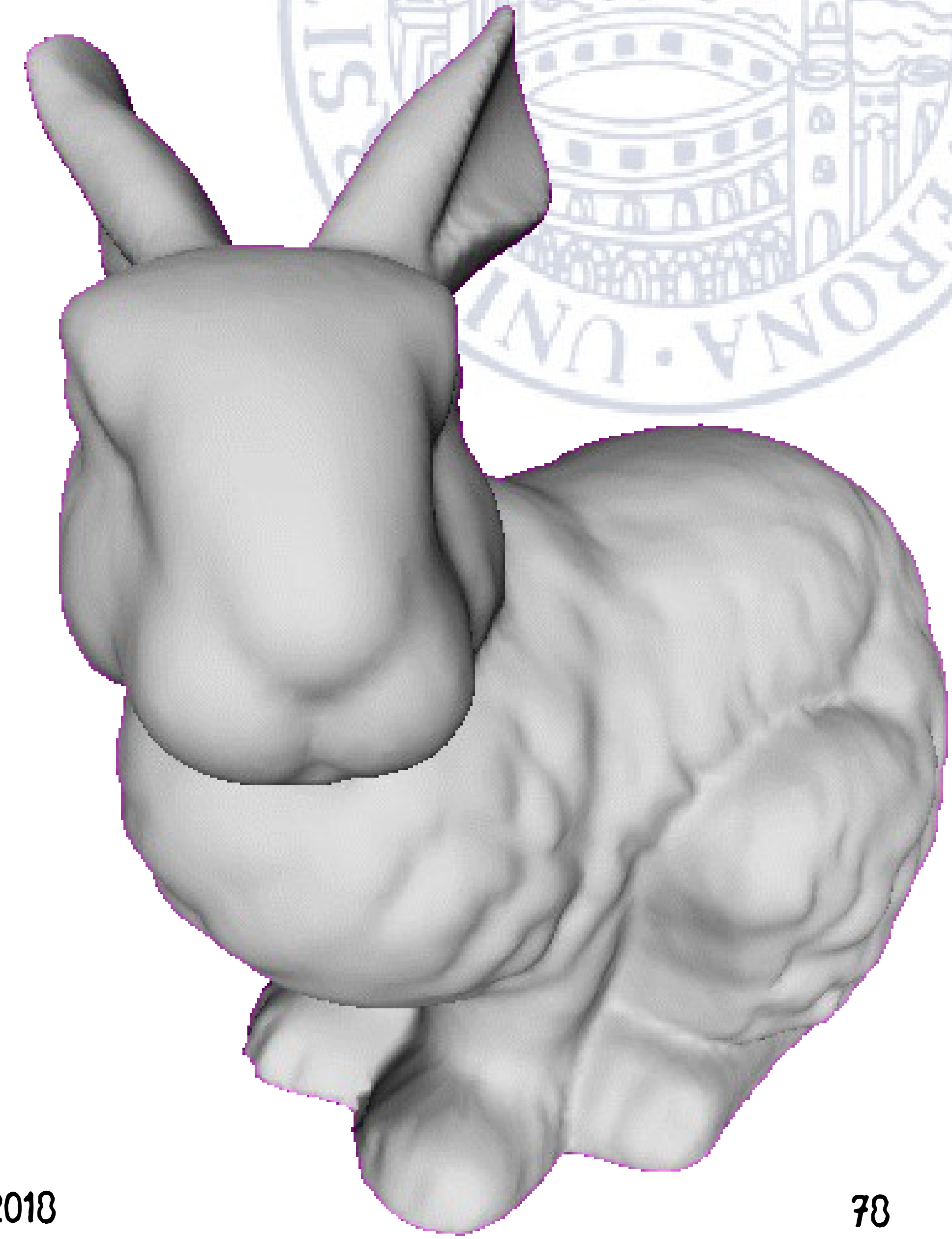
Proiezioni prospettiche

- Al variare della distanza focale (d)



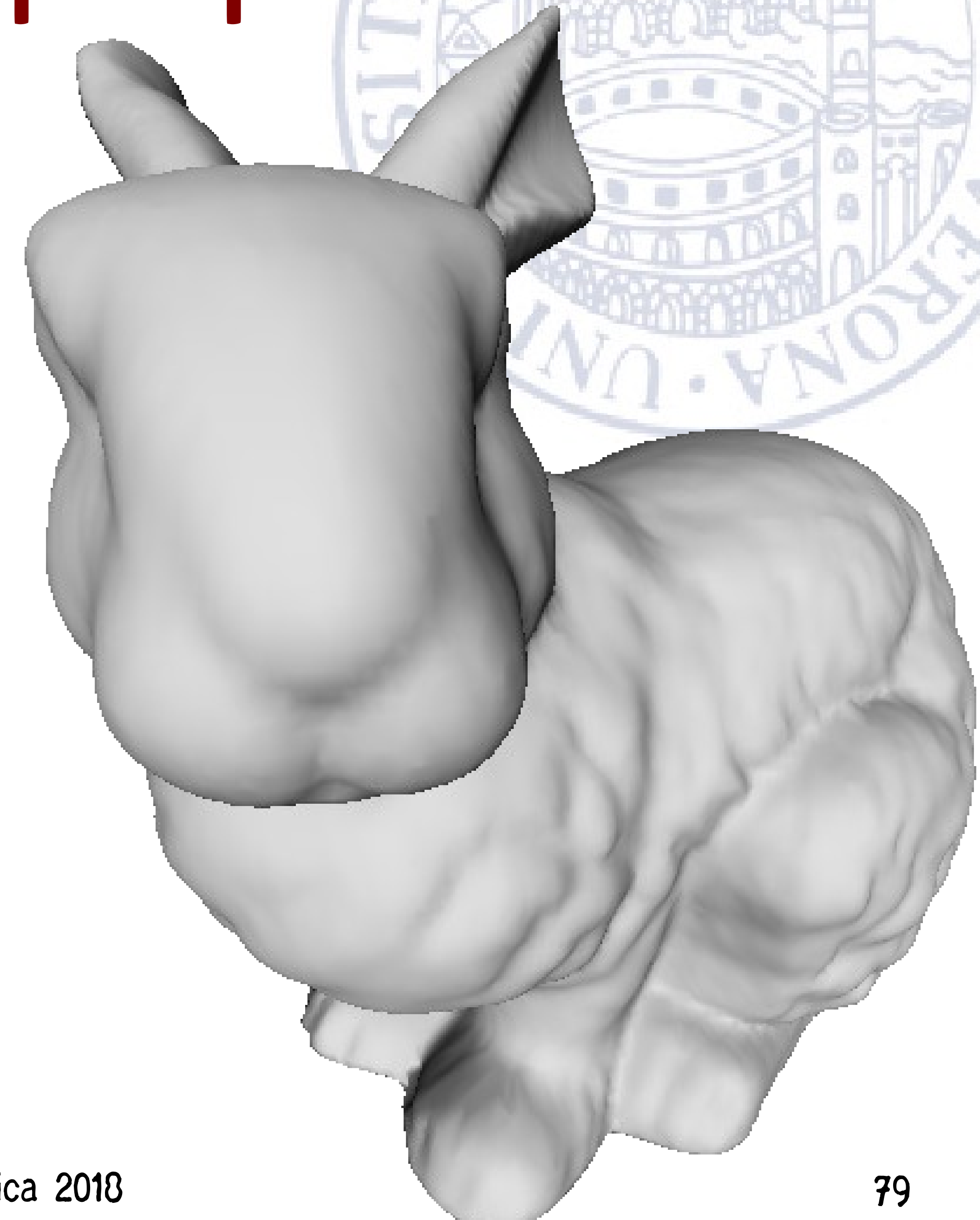
Proiezioni prospettiche

- Al variare della distanza focale (d)

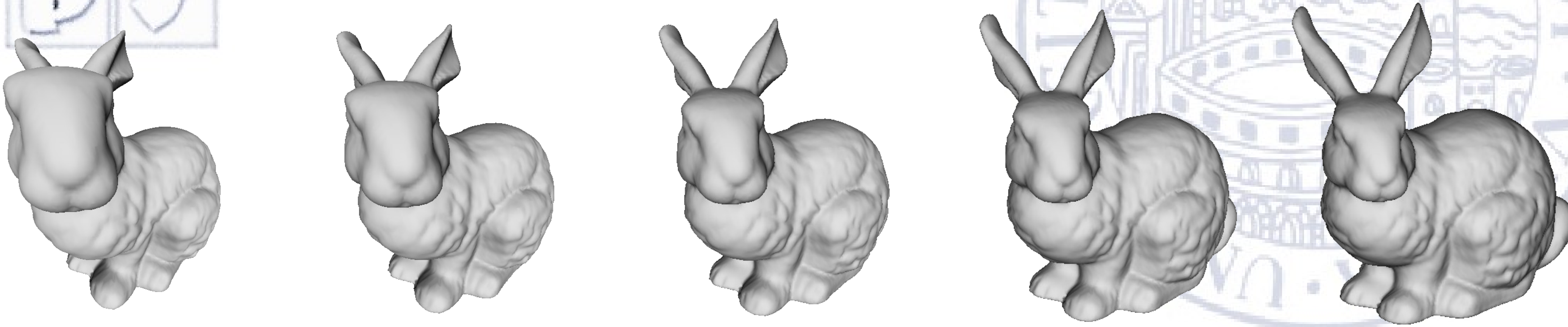


Proiezioni prospettiche

- Al variare della distanza focale (d)



Proiezioni prospettiche



d piccolo

d grande

d infinito
(p. parallela)

Più distorsione prospettica

Effetto "*fish-eye*" (grandangolo)

Proporzioni più mantenute

Effetto "*zoom*" (es. vista dal satellite)

Proiezione parallela

- La proiezione ortogonale (od ortografica) ha una forma matriciale ancora più ovvia

$$\boldsymbol{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- In sostanza l'effetto della matrice è quello di rimuovere la componente z

Trasformazione prospettica

- Per motivi che capiremo, in grafica si usa in realtà rappresentare la proiezione prospettica con una trasformazione che mappa comunque sullo spazio 3D, quindi una matrice 4x4.
- Per passare alla rappresentazione 2D basta poi eliminare la z (che è sempre uguale a d)

$$\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1/d & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\\1\end{pmatrix}$$

Divisione prospettica

- In realtà la coordinata omogenea 2D che ricavo dall'applicazione della matrice è $P' = (P_{x,} P_y, P_z/d)$
- L'operazione che trasforma in $P' = (P_x d/P_{z,} P_y d/P_z, 1)$ per avere la forma standard dei punti è la cosiddetta divisione
- Prima della divisione i tre valori possono essere usati per rappresentare l'equivalenza dei diversi punti rispetto alla proiezione.

Riferimenti

- Ganovelli et al. Cap. 4
- Scateni et al. Cap 4
- Angel (6 ed) cap. 3.1-3.3
- Buss Cap. 2

Domande di verifica

- Che cosa sono le coordinate omogenee?
- Qual è la differenza tra punti e vettori?
- Come si rappresentano orientazione e rotazione?
-
- Qual è la differenza tra proiezione prospettica e trasformazione prospettica?